Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Хмелевицкая средняя общеобразовательная школа»

Согласовано
Заместитель директора по УВР
МБОУ Хмелевицкой СОШ
_________ /И.Н.Смирнова/
31 августа 2015 г.

Утверждаю: _________
Н.А. Дербенев , директор
МБОУ Хмелевицкой СОШ.
Протокол педагогического
совета №7 от 31 августа 2015 года.
Приказ № 82 от 31 августа 2015 г.

Рабочая программа
элективного курса
«Избранные разделы математики для старшей школы»

для 10б-11б классов
(базовый уровень)
на 2015-2016 учебный год

Учителя: Смирнова Ирина Николаевна (11б класс)
Подковырина Тамара Александровна (10б класс)

Рассмотрена на заседании методического совета
МБОУ Хмелевицкой СОШ
Протокол №1 от 31 августа 2015 г.
Руководитель методсовета: ____________/С.П.Спиридонова/

с. Хмелевицы

2015 год

Министерство образования Нижегородской области

Государственное образовательное учреждение

дополнительного профессионального образования

«Нижегородский институт развития образования»

(ГОУ ДПО НИРО)

кафедра теории и методики обучения математике

ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Авторы-составители:

И.Г. Малышев, доцент кафедры теории и методики обучения математике НИРО, канд. техн. наук, доцент

М.А. Мичасова, доцент кафедры теории и

методики обучения математике НИРО, канд. пед. наук

Нижний Новгород

2010

Избранные разделы математики для старшей школы

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

Пояснительная записка

Данный элективный курс выполняет функцию поддержки основных курсов цикла математического образования старшей школы и ориентирован на углубление и расширение предметных знаний по математике и соответствующих компетентностей по ним.

Программа элективного курса состоит из четырех завершенных образовательных разделов одной и то же продолжительности 34 часа:

1. нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем, использование свойств функции;
2. геометрия;
3. функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах;
4. подготовка к единому государственному экзамену.

Полностью курс рассчитан на два учебных года по два часа в неделю аудиторных занятий. Общий объем развернутого курса 136 часов. Но не весь объем содержания элективного курса является строго обязательным. Доминанта умений и позитивного опыта может быть обеспечена на любом завершенном разделе по выбору учителя. Таким образом, возможен такой вариант, при котором ученик выполняет обязательный набор заданий только по одному разделу. Кроме того, обучение может осуществляться в виде различных комбинаций предложенных разделов.

Данная программа элективного курса своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 10 – 11 классов, которым интересна элементарная математика и её приложения. Предлагаемый курс освещает вопросы, оставшиеся за рамками школьного курса математики. Он выполняет следующие основные функции:

- развитие содержания базовых учебных предметов по математике, что позволяет поддерживать их изучение на профильном уровне и получить дополнительную подготовку для сдачи единого государственного экзамена;
- удовлетворение познавательного интереса обучающихся, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира.

(Сборник нормативных документов. Математика. – М: Дрофа, 2007.)

Поэтому одной из важных задач введения этого курса является не только прагматическая составляющая по развитию интереса к математике как необходимому средству поступления в вуз, но и развитие у учащихся интереса собственно к математике. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. В математике эквивалентом эксперимента предметов естественно-научного цикла является решение задач. Поэтому и курс строится на решении различных по степени важности и трудности задач.

Направленность курса – развивающая. Прежде всего, он ориентирован на удовлетворение и поощрение любознательности старших школьников, их аналитических и синтетических способностей.

В процессе реализации элективного курса можно использовать разнообразные подходы к организации занятий как академические лекции, семинары, уроки, так и проектную и исследовательскую деятельность, практики, игровые технологии и т.д.

Предполагается, что в результате изучения курса учащиеся овладеют:

- элементами теории множеств, умением математического моделирования при решении задач различной сложности, знаниями, связанными с равносильностью уравнений и неравенств на множестве, что позволяет единообразно решать большие классы задач;
- нестандартными методами решений уравнений и неравенств с использованием свойств функций;
- геометрическими сведениями, которые не только помогут учащимся углубить свои знания по геометрии, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении геометрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к вступительным экзаменам по математике в ее геометрической части;
- навыками решения нестандартных задач, включая задачи с параметром, для этого предложена некоторая классификация таких задач и указаны характерные внешние признаки в их формулировках, которые позволяют школьнику сразу отнести задачу к тому или иному классу;
- умениями, связанными с работой с научно-популярной и справочной литературой;
- элементами исследовательских процедур, связанных с поиском, отбором,

анализом, обобщением собранных данных, представлением результатов самостоятельного микроисследования.

В рамках данного элективного курса предполагается различный текущий и итоговый контроль: тесты, самостоятельные работы, выполнение проектов и исследовательских работ. Способ изложения материала в проектах побуждает учащихся не просто механически запоминать учебный материал, но и размышлять над ним в процессе обучения.

С учетом того, что данный курс выбирается учащимися самостоятельно, целесообразно, при оценке результата, использовать наравне с традиционной и нетрадиционную систему оценивания.

Практически по каждой теме, затронутой в программе, элективный курс предоставляет учителю и ученику дополнительные материалы как теоретического, так и практического характера. Кроме того, отдельные пункты курса могут послужить основой для докладов на математических кружках и факультативах. Первый раздел представлен наиболее полно, так как охватывает широкий круг вопросов.

Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей.

Примерное учебно-тематическое планирование

элективного курса в 10 -11 классах

№	Наименование разделов и дисцип-лин	Всего часов	Лекции	Выполнение практических заданий	Вид контроля
1	**Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции**	**34**	**10**	**24**	Самостоятельные работы
	Использование области определения функций	3	1	2	
	Использование ограниченности функций. Использование свойств синуса и косинуса	6	2	4	
	Замечательные неравенства	4	2	2	

	Применение производных. Задачи на исследование функций	6	2	4	
	Использование симметрии аналитических выражений. Использование чётности функции	4	1	3	
	Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах	7	2	5	
	Повторение. Решение задач.	4	-	4	
2	**Геометрия**	**34**	**18**	**16**	**С**амостоятельные работы
	Планиметрия	**20**	**11**	**9**	
	Из истории геометрии. Занимательные задачи по геометрии.	1	1	-	
	Прямоугольный треугольник.	1	1	-	
	Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника.	2	1	1	
	Свойства касательных, хорд, секущих.	1	1	-	
	Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники.	1	1	-	
	Различные формулы площади и их применение.	2	1	1	
	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.	12	5	7	
	Стереометрия	**12**	**6**	**6**	**С**амостоятельные работы
	Сечения многогранников.	3	1	2	
	Многогранники и тела вращения.	3	1	2	
	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена	4	3	1	
	Углы между прямыми, прямыми и плоскостями.	2	1	1	
3	**Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах**	**34**	**6**	**28**	**С**амостояте

	Многочлены	2	1	1	льные работы
	Рациональные функции	4	1	3	
	Иррациональные функции	6	1	5	
	Тригонометрические функции	6	1	5	
	Показательные функции	4	1	3	
	Логарифмические функции	6	1	5	
	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.	4		4	
	Повторение. Решение задач.	2		2	
4	**Подготовка к единому государственному экзамену**	**34**	**8**	**26**	**С**амостояте льные работы
	Задания В	6	2	4	
	Задания С1	6	1	5	
	Задания С3	8	2	6	
	Задания С2	6	1	5	
	Задания С4	8	2	6	
Итого		**136**	**44**	**92**	

Основное содержание курса

«ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ»

1. Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции (34 час.)

Использование области определения функций (3часа) Использование ограниченности функций. Использование свойств синуса и косинуса (6час.) Замечательные неравенства (4час.) Применение производных. Задачи на исследование функций (6час.) Использование симметрии аналитических выражений. Использование чётности функции (4час.) Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах (7час.) Повторение. Решение задач (4час.)

2. Геометрия (34 час.)

Из истории геометрии. Занимательные задачи по геометрии (1час.) Прямоугольный треугольник (1час.) Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника (2час.) Свойства касательных, хорд, секущих (1час.) Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники (1час.) Различные формулы площади и их применение (2час.)

Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея (12час.)

Сечения многогранников (3час.) Многогранники и тела вращения (3час.) Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена (4час.) Углы между прямыми, прямыми и плоскостями (2час.)

3. Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах (34 час.)

Многочлены (2час.) Рациональные функции (4час.) Иррациональные функции (6час.) Тригонометрические функции (6час.) Показательные функции (4час.) Логарифмические функции (6час.) Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ. (4час.) Повторение. Решение задач (2час.)

4. Подготовка к единому государственному экзамену (34 час.)

Задания В (6 час.) Задания С1 (6 час.) Задания С3 (8 час.) Задания С2 (6 час.) Задания С4 (8 час.)

Избранные разделы математики для старшей школы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Методическое обеспечение раздела 1

Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем.

Использование свойств функции

В 2010/2011 учебном году КИМ по математике изменяются только на уровне С1 и С5. В демонстрационном варианте 2011 года в задании С1 предлагается решить уравнение, а не систему как было раньше. Поэтому мы предлагаем систему заданий как по теме «Уравнения», так и по теме «Системы уравнений». Одновременно это будет необходимый теоретический материал и к первому и к четвёртому разделу.

При решении уравнений желательно придерживаться критериев оценивания задания, которые предъявляются к решениям в ЕГЭ (см. ниже).

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Верно найдены нули числителя, но или не произведен отбор найденных решений, или допущены ошибки в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

1. Дробно-рациональные уравнения

Разложение на множители

1. $\frac{x}{x^2-6}+\frac{x^2}{x-6}+2=0$

Представим 2 в виде суммы 1+1 и сгруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{x}{x^2-6}+1\right)+\left(\frac{x^2}{x-6}+1\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-6}{x^2-6}+\frac{x^2+x-6}{x-6}=0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+x-6\right)\left(\frac{1}{x^2-6}+\frac{1}{x-6}\right)=0.$$

1) $\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x^2-6\neq 0, \\ x-6\neq 0; \end{cases}$ $x=2, x=-3$ 2) $\dfrac{x^2+x-12}{(x^2-6)(x-6)}=0$; $x=-4, x=3$

Ответ: -4, -3, 2, 3.

Замена переменной

2. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\dfrac{x}{x^2-2x+2}=1$

Проверка показывает, что число $x=0$ является корнем уравнения.

Пусть $x\neq 0$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x.

Уравнение примет вид: $\dfrac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\dfrac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1.$

Обозначим $x+\dfrac{2}{x}=t$, получим $\dfrac{t+3}{t-1}+\dfrac{1}{t-2}=1.$

$$\frac{(t+3)(t-2)+(t-1)-(t-1)(t-2)}{(t-1)(t-2)}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2+t-6+t-1-t^2+3t-2}{(t-1)(t-2)}=0,$$

$t=\dfrac{8}{5}$, $x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{8}{5}$ $5x^2-8x+10=0$

Дискриминант уравнения меньше нуля, поэтому уравнение не имеет ни одного корня.

Итак, ни одно число $x\neq 0$ не является корнем уравнения.

Ответ: 0

3. $\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)^2-2\cdot\dfrac{x^2-16}{x^2-4}+\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^2=0$

Пусть $a=\dfrac{x-4}{x-2}$, $b=\dfrac{x+4}{x+2}$, тогда получаем уравнение $a^2-2ab+b^2=0$,

Пусть $b\neq 0$, $x\neq -4$ ($x=-4$ не является корнем исходного уравнения), тогда разделим обе части уравнения на b^2: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$, откуда $\frac{a}{b} = 1$, т.е. $\frac{x-4}{x-2} = \frac{x+4}{x+2}$.

Корень уравнения $x = 0$.

Ответ: 0

Применение свойств функций

4. $x^3 + 3x = \frac{28}{x}$

На каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция $f(x) = x^3 + 3x$ возрастает (как сумма двух возрастающих функций), а функция $g(x) = \frac{28}{x}$ убывает. Значит, на каждом из этих промежутков уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Поскольку $f(2) = g(2)$ получаем, что $x = 2$ - единственный корень на промежутке $(0;+\infty)$. Поскольку $f(-2) = g(-2)$ получаем, что $x = -2$ - единственный корень на промежутке $(-\infty;0)$.

Ответ: -2; 2

5. $\frac{1}{(x^2+3x)^2+1} + \frac{3}{(x+3)^2+1} + \frac{5}{(x^2+2x-3)^2+1} = 9$

Из неравенств $(x^2+3x)^2+1 \geq 1, (x+3)^2+1 \geq 1, (x^2+2x-3)^2+1 \geq 1$ следует, что каждая из трех дробей левой части не больше

$$\frac{1}{(x^2+3x)^2+1} \leq 1, \quad \frac{3}{(x+3)^2+1} \leq 3, \quad \frac{5}{(x^2+2x-3)^2+1} \leq 5.$$

Поэтому сумма трех дробей равняться 9 может только в том случае, когда

$$\begin{cases} \frac{1}{(x^2+3x)^2+1} = 1, \\ \frac{3}{(x+3)^2+1} = 3, \\ \frac{5}{(x^2+2x-3)^2+1} = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x)^2 = 0, \\ (x+3)^2 = 0, \\ (x^2+2x-3)^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

Ответ: -3

6. Найдите корни уравнения $f(x)=1,$ если $x\neq 0$ и $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$

Заменим x на $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}.$ Умножим данное равенство на 2: $2f\left(\frac{1}{x}\right)+4f(x)=\frac{6}{x}.$

Вычтя из полученного равенства исходное, получим: $3f(x)=\frac{6}{x}-3x$ или $f(x)=\frac{2}{x}-x.$

Теперь осталось решить уравнение: $\frac{2}{x}-x=1$, откуда $x^2+x-2=0$, корнями которого являются числа -2,1.

Ответ: -2;1

2. Иррациональные уравнения

1. $(x^2+3x-10)\sqrt{2-3x}=3x^2+9x-30$

$$(x^2+3x-10)\sqrt{2-3x}=3(x^2+3x-10)\quad\Leftrightarrow (x^2+3x-10)(\sqrt{2-3x}-3)=0,$$

1) $\begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ 2-3x\geq 0, \end{cases}$ $x=-5$ 2) $\sqrt{2-3x}=3,$ $2-3x=9,\ 3x=-7,\ x=-\frac{7}{3}$

Ответ: -5, $-\frac{7}{3}$

2. $(2x^2-7x+3)\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=3-10x+9x^2-2x^3.$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=-2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\left(\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}+x-1\right)=0,$$

1) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, \\ x=3 \end{array}\right. \\ x^3+2x^2-6x-3\geq 0, \end{cases}$ $x=3$ 2) $\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=1-x$

$$\begin{cases} x^3+2x^2-6x-3=(1-x)^2 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2-4x-4=0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=-2$$

Ответ: -2, -1, 3

3. $$\frac{x^2-x-\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}}{5x^3-6x+1}=0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}=x^2-x, \\ 5x^3-6x+1\neq 0; \end{cases}$$

1) $\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}=x^2-x$

$$\begin{cases} x^4-2x^3+3x^2+3x+1=\left(x^2-x\right)^2, \\ x^2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x+1=0, \\ x^2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=-\frac{1}{2}.$$

2) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ 5x^3-6x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=-\dfrac{1}{2}.$

Ответ: -1; $-\dfrac{1}{2}$.

4. $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}-\sqrt{x+25-10\sqrt{x}}=1$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x}-5\right)^2}=1, \Leftrightarrow \left|\sqrt{x}-2\right|-\left|\sqrt{x}-5\right|=1$$

Пусть $\sqrt{x}=t, t\geq 0$, тогда $|t-2|-|t-5|=1$

1). $\begin{cases} 0\leq t\leq 2 \\ 2-t+t-5=1 \end{cases}$ нет решений 2). $\begin{cases} 2\leq t\leq 5 \\ t-2+t-5=1 \end{cases}$ $t=4$, $\sqrt{x}=4$, $x=16$

3). $\begin{cases} t \ge 5 \\ t-2-t+5=1 \end{cases}$ нет решений

Ответ: 16

3. Тригонометрические уравнения

Отбор корней

1. $\dfrac{(2x-9\pi)(5x-9\pi)(8x-9\pi)}{\sqrt{\cos x}}=0$ $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4{,}5\pi \\ x=1{,}8\pi \\ x=1{,}125\pi \end{array} \right. \\ \cos x>0 \end{cases}$ $\quad x=1{,}8\pi$

Ответ: $1{,}8\pi$

2. $\dfrac{2\sin x+\sqrt{3}}{\sqrt{tgx}}=0$ $\quad \begin{cases} \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ tgx>0 \end{cases}$ $\quad x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

3. $\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x+1}=0$

$\begin{cases} \cos 4x=0, \\ \sin 4x\ne -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos 4x=0, \\ \sin 4x=1 \end{cases}$ $\quad 4x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$

4. $\sqrt{4-5\sin x}=\sqrt{2}\cos x$

$\begin{cases} 4-5\sin x=2\cos^2 x, \\ \cos x\ge 0 \end{cases}$

1) $4-5\sin x=2(1-\sin^2 x) \Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=2, \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$ $\quad \sin x=\dfrac{1}{2}$

2) $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \qquad x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

4. Показательные уравнения

1. $\dfrac{11^{x^2-2}}{13^{\sqrt{x}}} = \dfrac{121}{13^{\sqrt{x}}}$. $\qquad \begin{cases} 11^{x^2-2} = 11^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Ответ: 2

2. $\dfrac{13^{x^2+3x+2} - 11^{x^2+3x+2}}{x+1} = 0$.

$$\begin{cases} 13^{x^2+3x+2} = 11^{x^2+3x+2}, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{13}{11}\right)^{x^2+3x+2} = 1, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 \neq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Ответ: -2

3. $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$.

$2^{\sin^2 x} + \dfrac{2}{2^{\sin^2 x}} = 3$. Пусть $t = 2^{\sin^2 x}, t > 0$, тогда $t^2 - 3t + 2 = 0$ $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2 \end{array}\right.$

$2^{\sin^2 x} = 1, \quad \sin x = 0, \quad x = \pi n, n \in Z$

$2^{\sin^2 x} = 2, \quad \sin x = \pm 1, \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi m}{2}, m \in Z$.

4. $3^x + 4^x = 5^x$

Воспользуемся тем, что $5^x > 0$ при любом значении переменной x, и перейдем к равносильному уравнению $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = 1$. Заметим, что $x = 2$ - решение этого уравнения. Покажем, что других решений нет.

Функция $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ убывает как сумма двух убывающих функций, а потому каждое свое значение (в частности, значение 1) она принимает только один раз.

Ответ: 2

5. $x+4=3^{-x}$

Легко подобрать корень данного уравнения $x=-1: -1+4=3^1$. Покажем, что других решений нет.

Функция $y=x+4-3^{-x}$ возрастающая, а потому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Следовательно, у исходного уравнения не может быть больше одного решения.

Ответ: -1

Замечание.

Когда мы доказываем, что какое-то уравнение не имеет больше корней, за исключением уже найденного, чаще всего мы опираемся на свойства монотонности правой и левой частей уравнения: если $f(x_0)=g(x_0)$, причем функция $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает в области допустимых значений x, то уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет корней, отличных от x_0. В других случаях вывод о числе корней уравнения сделать трудно. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Рассмотрим уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x$. Если построить графики левой и правой части «ясно», что данное уравнение имеет единственный корень, причем, поскольку функции $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $\log_{\frac{1}{16}}x$ взаимно обратны, соответствующая точка пересечения будет лежать на прямой $y=x$. Однако, оказывается, что данное уравнение имеет еще два корня $x=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{4}$ (проверьте!). Дело, конечно, в том, что графики изображаются нами очень неточно. На самом деле графики пересекаются в трех точках, причем третий корень нельзя записать с помощью элементарных функций.

5. Логарифмические уравнения

1. $\log_7(x^2-12)=\log_7 x$. $\begin{cases} x^2-12=x, \\ x>0 \end{cases}$ $x=4$

Ответ: 4

2. $\log_6(3-x)\cdot\log_7(2x^2-13x+21)=0$

1) $\begin{cases} \log_6(3-x)=0, \\ 2x^2-13x+21>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=1 \\ 2x^2-13x+21>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

2) $\begin{cases} \log_7(2x^2-13x+21)=0, \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-13x+21=1, \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-13x+20=0, \\ x<3 \end{cases}$

$x=2{,}5$

Ответ: 2; 2,5

3. $$\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x^3-5x^2+4x}}{\sqrt{4-x}+\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1)}=1$$

$$\begin{cases} 4-x\geq 0, \\ -\sqrt{x^3-5x^2+4x}=\log^2_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right) \\ \sqrt{4-x}+\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 4, \\ x(x^2-5x+4)=0, \\ \log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1)=0 \\ \sqrt{4-x}\neq-\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1) \end{cases}$$

1). $x(x^2-5x+4)=0$ $x=0, x=4, x=1$

2). $\log_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1)=0$

$$\begin{cases} 5x+1>0, \\ 5x+1\neq 1, \\ x^3-5x^2+4x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{5}, \\ x\neq 0, \\ x\left(x^2-5x+4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

3). Возвращаясь к исходной системе, получаем только $x=1$

Ответ: 1

4. $2^{\log_5 x}+x^{\log_5 2}=7-4^{1/3\log_4 27}$.

Докажем, что $2^{\log_5 x}=x^{\log_5 2}$.

Действительно, $2^{\log_5 x}=2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{\log_2 5}}=x^{\log_5 2}$.

Учитывая этот результат, получим $2\cdot 2^{\log_5 x}=7-3$, $2^{\log_5 x}=2$, т.е. $x=5$

Ответ: 5

6. Системы уравнений

Ниже приведены критерии оценивания заданий в ЕГЭ 2010.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x(\sin x)$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Качество выполнения задания С1 в 2010 г. в Нижегородской области

2б	10,86%
1б	9,7%

1. Решите систему $\begin{cases} y+\sin x=0, \\ \left(4\sqrt{\sin x}-1\right)(5y-3)=0 \end{cases}.$

Из второго уравнения системы получаем $\sin x=\dfrac{1}{16}$ или $\begin{cases} \sin x\ge 0, \\ y=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$.

Возвращаясь к исходной системе, получаем: $\begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{16}, \\ y=-\dfrac{1}{16}; \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x=-y, \\ \sin x\ge 0, \\ y=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$

Вторая система решений не имеет.

Ответ: $\left((-1)^n\arcsin\dfrac{1}{16}+\pi n;-\dfrac{1}{16}\right), n\in Z.$

2. Решите систему: $\begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ x-1=\left(\sqrt{x}+1\right)y \end{cases}$

Выразим из первого уравнения системы x и $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = 9 - 3y,$ $\begin{cases} x = (9-3y)^2, \\ y \le 3, \\ x \ge 0; \end{cases}$ и

подставим во второе уравнение исходной системы: $(9-3y)^2 - 1 = (9-3y+1)y;$

$$(9-3y-1)(9-3y+1) = (9-3y+1)y,$$

$9 - 3y + 1 = 0$, $y = \dfrac{10}{3}$ не удовлетворяет условию $y \le 3,$ или $9 - 3y - 1 = y$, $y = 2$

При $y = 2$, $\sqrt{x} = 3$ и $x = 9.$

Ответ: $(9;2)$.

3. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{y + \cos^2 x - 1} = -\cos x, \\ y \cdot \sin^2 x - \left(y - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы: $\begin{cases} \cos x \le 0, \\ y + \cos^2 x - 1 = \cos^2 x \end{cases}$, $\begin{cases} \cos x \le 0, \\ y = 1. \end{cases}$

Подставим $y = 1$ во второе уравнение исходной системы:

$$\sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

Откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $\cos x \le 0$, получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \; x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 1 \right), \left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k; 1 \right), n, k \in Z$.

4. Решите систему $\begin{cases} 2 \lg \sqrt{x} + 2^y + 1 = 0, \\ \lg x^3 + 4^y - 1 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg x + 2^y + 1 = 0, \\ 3\lg x + 4^y - 1 = 0; \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на 3 и вычтем из 3 уравнения второе, получим:

$4^y - 3\cdot 2^y - 4 = 0,$ тогда $2^y = 4$ или $2^y = -1$ – решений не имеет.

Если $y = 2$, то $\lg x + 5 = 0$ и $x = 10^{-5}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{100000};2\right)$

5. Решите систему $\begin{cases} \cos x = y + \sqrt{3}, \\ \sin x = \sqrt{3}y + 2; \end{cases}$

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим уравнение относительно y: $\left(y + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}y + 2\right)^2 = 1$

$y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + 3y^2 + 4\sqrt{3}y + 4 = 1, \qquad 2y^2 + 3\sqrt{3}y + 3 = 0 \quad y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \ y = -\sqrt{3}.$

1) Если $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ и $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

2) Если $y = -\sqrt{3}$, то $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -1 \end{cases}$ и $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; -\sqrt{3}\right), n \in Z$.

6. Решите систему $\begin{cases} \left(2^x - 2^{2y}\right)\left(4^x - 2^{4y}\right) = 45, \\ 2^x + 4^y = 5; \end{cases}$

Упростим первое уравнение системы: $\left(2^x - 2^{2y}\right)\left(\left(2^x\right)^2 - \left(2^{2y}\right)^2\right) = 45,$

$\left(2^x - 2^{2y}\right)^2\left(2^x + 2^{2y}\right) = 45.$

Тогда исходная система примет вид: $\begin{cases}\left(2^x - 2^{2y}\right)^2 \cdot 5 = 45, \\ 2^x + 4^y = 5;\end{cases}$

Далее получаем:

$$\begin{cases}2^x - 2^{2y} = 3, \\ 2^x + 2^{2y} = 5;\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}2^x - 2^{2y} = -3, \\ 2^x + 2^{2y} = 5;\end{cases}$$

Решая каждую систему методом алгебраического сложения, получаем ответ.

Ответ: $(2;0),(0,1)$.

7. Решите систему $\begin{cases}2^{\sqrt{x^2-6x-23}} = 6 - \sqrt{x^2-6x-23}, \\ \log_3 x = y;\end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение системы.

Пусть $t = \sqrt{x^2 - 6x - 23}$ $, t > 0$, тогда $2^t = 6 - t$. Это уравнение имеет единственный корень $t = 2$, так как функция, стоящая в левой части уравнения $y = 2^t$ возрастающая, а функция $y = 6 - t$ убывающая. Значит, если и есть корень у уравнения, то только один.

$\sqrt{x^2 - 6x - 23} = 2$, тогда $x^2 - 6x - 27 = 0$, $x = 9$ или $x = -3$.

$x = -3,$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Значит, $x = 9, y = \log_3 9 = 2$.

Ответ: $(9,2)$.

8. Решите систему $\begin{cases}2x^2 + 2x - \cos 2y - \sin y = 12, \\ x - \sin y = 1\end{cases}$

$\sin y = x - 1,$

Так как $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, то $\cos 2y = 1 - 2(x-1)^2$.

Подставим полученные выражения в первое уравнение исходной системы:

$$2x^2+2x-1+2(x-1)^2-x+1=12, \quad 4x^2-3x-10=0, \quad x=2 \text{ или } x=-\frac{5}{4}.$$

$$\begin{cases} x=2, \\ \sin y=1; \end{cases} \left(2;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \qquad \begin{cases} x=-\frac{5}{4}, \\ \sin y=-\frac{9}{4}. \end{cases} \text{ нет решений}$$

Ответ: $\left(2;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

7. Решение неравенств

(показательных, логарифмических, иррациональных)

Ниже приведены критерии оценивания заданий С3 в ЕГЭ 2010.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимально возможное количество баллов за задачу не ставится в том случае, если в ее решении присутствуют ошибки, неточности или недостатки обоснования. Подчеркнем, что на экзамене оценивание решения задачи должно производиться в строгом соответствии с заранее утвержденными критериями.

Далеко не праздным является вопрос о том, какие способы решения неравенств и записи ответа допустимы на едином государственном экзамене. Главным требованием к решению была и остается его математическая правильность, а именно:

- в ответ необходимо включить только верные значения искомой величины, причем все;
- форма записи ответа может быть любой из употребляемых в современной учебной литературе;

- текст решения должен служить реальным обоснованием (точнее, доказательством) правильности полученного ответа;
- при решении неравенства приемлемы любые математические методы;
- рациональность решения, равно как и его нерациональность, на экзамене во внимание не принимается.

Рассмотрим решение неравенства С3 (07.06. 2010).

Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_2\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}>\log_2\left(7^{5-x^2}-4\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}, 0<t\le 1,$ тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2\left((t-5)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_2\frac{t-5}{7^{16}t-1}>\log_2\left(7^5t-4\right)^2,$$

$t-5<0$, поэтому $7^{16}t-1<0,$ то есть $0<t<\frac{1}{7^{16}}.$

Получаем: $\begin{cases}\log_2(t-5)^2>\log_2\left(7^5t-4\right)^2,\\ 0<t<\frac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|t-5|>\left|7^5t-4\right|,\\ 0<t<\frac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}5-t>4-7^5t,\\ 0<t<\frac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<t<\frac{1}{7^{16}}.$$

Тогда $7^{-x^2}<7^{-16}$, $x^2>16$ $\left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<-4.\end{array}\right.$ Ответ: $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty).$

3балла	0,52%
2балла	0,2%
1балл	4,66%

В таблице представлено качество выполнения задания С3 2010 г. в Нижегородской области

Возможные методы решения неравенств:

1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем;
2. Расщепление неравенств;

3. Метод перебора;
4. Метод интервалов;
5. Введение новой переменной;
6. Метод рационализации;
7. Использование свойств функции: область определения функции, ограниченность функции, монотонность функции.

Метод сведения неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Предварительные тесты для школьников, которые помогут им научиться осуществлять равносильные переходы.

Тест 1. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Rightarrow$». Укажите этот пример.

1) $\log_2 x = \log_2\left(2 - x^2\right) \Rightarrow x = 2 - x^2$ 2) $\log_x \frac{1}{3} = \log_{2-x^2} \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2 - x^2.$

3) $\log_x\left(2 - x^2\right) < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 < x, \\ 2 - x^2 > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 4) $2^{\log_2 x} = 2 - x^2 \Rightarrow x = 2 - x^2.$

5) $\log_2 x < \log_2\left(2 - x^2\right) \Rightarrow x < 2 - x^2.$

Тест 2. Одна из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений. Укажите эту пару.

1) $\lg x = 0$ и $x = 1.$

2) $x^2 \geq 0$ и $2^x > 0.$

3) $\log_2 x > 1$ и $x > 2.$

4) $\lg x = \lg y$ и $x = y.$

5) $2^x + 2^{-x} = 1$ и $\lg x = \lg(-x).$

Тест 3.

В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Leftrightarrow$». Укажите этот пример.

1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0, \\ x^2-1<1. \end{cases}$

2) $\log_x(2-x)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=x^2, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ 3) $\left(\sin x+\sqrt{2}\right)^x<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x+\sqrt{2}<1, \\ x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x+\sqrt{2}>1, \\ x<0. \end{cases} \end{array}\right.$

4) $x\log_2 x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ \log_2 x=0. \end{array}\right.$ 5) $\log_2 x=\log_2(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-1, \\ x>0. \end{cases}$

Тест 4. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Leftrightarrow$». Укажите этот пример.

1) $3\log_a b=c \Leftrightarrow \log_a b^3=c$. 2) $-\log_a b=c \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{b}=c.$

3) $\frac{1}{3}\log_a b=c \Leftrightarrow \log_a \sqrt[3]{b}=c.$ 4) $2\log_a b=c \Leftrightarrow \log_a b^2=c.$

5) $\frac{1}{2}\log_a b=c \Leftrightarrow \log_a \sqrt{b}=c.$

Тест 5. Среди приведенных высказываний найдите истинное:

1) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x<1 \Leftrightarrow x<0;$ 2) $\log_{\sqrt{3}-1} x<1 \Leftrightarrow x>\sqrt{3}-1;$

3) $\log_x\left(\sqrt{5}-1\right)>1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-1>x;$ 4) $\left(\sqrt{3}-1\right)^x>1 \Leftrightarrow x>0;$

5) $\log_{\sqrt{5}-2} x>1 \Leftrightarrow x<\sqrt{5}-2.$

Ключ к тестам

Номер теста	1	2	3	4	5
Правильный ответ	3	4	4	4	2

Иррациональные неравенства.

Стандартные схемы перехода к равносильным системам или совокупности систем.

- $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} (\geq) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) (\geq), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) (\leq) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x), (\leq) \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) (\geq) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), (\geq) \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x).$

В последних двух неравенствах знак $>$ можно заменить на один из знаков $<, \leq, \geq$.

Пример: Решите неравенство $\sqrt{7-x} < \dfrac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < 2, \quad 3 < x \leq 7.$

Показательные неравенства.

Стандартные схемы перехода к равносильным системам или совокупности систем.

- $$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} (\geq) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) (\geq), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < g(x) (\leq), \\ 0 < \varphi(x) < 1 (\leq 1). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример. Решите неравенство $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} \leq 1$.

Решение.

$$\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} \leq \left(4x^2 + 2x + 1\right)^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x \leq 0, \\ 4x^2 + 2x + 1 \geq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x \geq 0, \\ 0 < 4x^2 + 2x + 1 \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x-1) \leq 0, \\ x(2x+1) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x(x-1) \geq 0, \\ x(2x+1) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -1/2 \\ x \geq 0, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 1, \end{array}\right. \\ -1/2 \leq x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ -1/2 \leq x \leq 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Логарифмические неравенства.

Стандартные схемы перехода к равносильным системам или совокупности систем.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)(\geq) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > (\geq) g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > (\geq) f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример.

Решите неравенство $\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < -1$.

Решение.

$$\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < \log_x \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{4x+5}{6-5x} < \frac{1}{x}, \\ \frac{4x+5}{6-5x} > 0, \\ x > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4x+5}{6-5x} > \frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x} > 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение каждой из получившихся систем не представляет особого труда. Решите их самостоятельно.

Ответ: $(1/2;1)$.

Неравенства, содержащие знак модуля.

Стандартные схемы перехода к равносильным системам или совокупности систем.

- $|f(x)| < g(x)(\leq) \Leftrightarrow -g(x) < (\leq) f(x) < (\leq) g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x)(\leq) \\ f(x) > -g(x)(\geq) \end{cases}$
- $|f(x)| > g(x)(\geq) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x)(\geq), \\ f(x) < -g(x)(\leq). \end{array}\right.$
- $|f(x)| > |g(x)|(\geq) \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)(\geq) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0(\geq)$.

Пример.

Решите неравенство $\left|x^2-2x-3\right| \le \dfrac{x+1}{2}$.

Решение.

$$\left|x^2-2x-3\right| \le \frac{x+1}{2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x-6 \le x+1, \\ 2x^2-4x-6 \ge -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x-7 \le 0, \\ 2x^2-3x-5 \ge 0. \end{cases}$$

1) $2x^2-5x-7=0, x_1=-1, x_2=\dfrac{7}{2};$

2) $2x^2-3x-5=0, x_1=-1, x_2=\dfrac{5}{2}.$

$$\begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{7}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge \dfrac{5}{2}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ \dfrac{5}{2} \le x \le \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1\} \cup \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{2}\right].$

Метод расщепления неравенств.

$$f(x)\cdot g(x)>0 \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)}>0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример.

Решите неравенство $\left(x+\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \ge 4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$

Решение.

Приведем данное неравенство к следующему виду:

$$\left(x+\frac{3}{x}-4\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем:

1) $$\begin{cases} x+\dfrac{3}{x}-4\geq 0 \\ \left(\dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0 \\ x\neq 4 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leq 1, \\ 3\leq x<4, \\ 4<x\leq 5; \end{array}\right.$$

2) $$\begin{cases} x+\dfrac{3}{x}-4\leq 0 \\ \left(\dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x}\leq 0 \\ |x-3|=1, x\neq 4 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $0<x\leq 1, x=2, 3\leq x<4, 4<x\leq 5.$

Перебор случаев.

Пример 1

Решите неравенство $2^x+2^{|x|}\geq 2\sqrt{2}$

Решение.

Данное неравенство определено при всех значениях x. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x\geq 0,$ тогда неравенство примет следующий вид:

$$2^x+2^x\geq 2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^x\geq\sqrt{2}\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}.$$

2. Если $x<0$, то имеем:

$$2^x+\frac{1}{2^x}\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-2\sqrt{2}\cdot t+1\ge 0,\\ 2^x=t\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\ge\sqrt{2}+1\\ t\le\sqrt{2}-1\end{array}\right.\\ 2^x=t\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x\ge\sqrt{2}+1\\ 2^x\le\sqrt{2}-1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\log_2\left(\sqrt{2}+1\right)\\ x\le\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\end{array}\right.$$

Сравним два числа $\log_2\left(\sqrt{2}+1\right)$ и $\frac{1}{2}$.

Так как $\sqrt{2}+1>\sqrt{2}$, то $\log_2\left(\sqrt{2}+1\right)>\log_2\sqrt{2}$ или $\log_2\left(\sqrt{2}+1\right)>\log_2\sqrt{2}$ или

$\log_2\left(\sqrt{2}+1\right)>\frac{1}{2}$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ: $\left(-\infty;\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Пример 2

Решите неравенство $\log_{x+1}(4-x)\ge\frac{\left|\log_{15}(4x+3)-1\right|}{\log_{15}(x+1)}$

Решение.

Область определения неравенства $\begin{cases}4x+3>0,\\ 4-x>0,\\ x+1>0,\\ x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{3}{4}<x<0,\\ 0<x<4\end{array}\right.$

$$\frac{\log_{15}(4-x)}{\log_{15}(x+1)}-\frac{\left|\log_{15}(4x+3)-1\right|}{\log_{15}(x+1)}\ge 0,$$

$$\frac{\log_{15}(4-x)-\left|\log_{15}(4x+3)-1\right|}{\log_{15}(x+1)}\ge 0$$

1) Если $\log_{15}(4x+3)\ge 1$, т.е. $x\ge 3$, мы рассматриваем исходное неравенство на

промежутке $3 \le x < 4$ (1):

$$\frac{\log_{15}(4-x) - \log_{15}(4x+3) + \log_{15}15}{\log_{15}(x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_{15}(15(4-x)) - \log_{15}(4x+3)}{\log_{15}(x+1)} \ge 0$$

$$\frac{15(4-x) - (4x+3)}{x+1-1} \ge 0$$

$$\frac{57-19x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 3.$$

Пересекая полученный промежуток с (1), получаем $x = 3$.

2) Если $\log_{15}(4x+3) < 1$, то рассматриваем исходное неравенство на $\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} < x < 0, \\ 0 < x < 3 \end{array}\right.$ (2)

$$\frac{\log_{15}(4-x) + \log_{15}(4x+3) - 1}{\log_{15}(x+1)} \ge 0,$$

$$\frac{\log_{15}(4-x)(4x+3) - 1}{\log_{15}(x+1)} \ge 0$$

$$\frac{(4-x)(4x+3) - 15}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-3)\left(x - \frac{1}{4}\right)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ \frac{1}{4} \le x \le 3 \end{array}\right..$$

Пересекая с (2), получаем: $\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 3\right]$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 3\right]$.

Метод интервалов.

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) > 0$$

Основным способом решения данного неравенства считается перебор всех таких случаев знаков сомножителей $f_i(x)$, при которых произведение имеет требуемый в неравенстве знак.

Метод интервалов применяется для решения неравенств $(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n} > 0$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ - целые числа. Он позволяет более организованно исследовать знак произведения, стоящего в левой части неравенства, опираясь на следующее рассуждение:

- точки $x_1, x_2, \ldots x_n$ разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых произведение имеет фиксированный знак;
- на самом правом из получившихся промежутков произведение заведомо положительно, так как на нем положителен каждый из его сомножителей;
- далее, если двигаться по числовой оси справа налево, то при переходе через очередной корень x_i меняет знак множитель $x - x_i$ и только он, поэтому знак произведения либо меняется – когда соответствующая степень k_i нечетна, либо не меняется – когда она четна;
- наконец, для завершения исследования достаточно выяснить, в каких точках x_i произведение равно нулю, а в каких не имеет смысла, что определяется знаком степени k_i.

Пример.

Решите неравенство $\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \geq 0$.

Решение.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9}$, найдем ее область определения: $3^x - 10\sqrt{3^x} + 9 \geq 0$.

Пусть $t = \sqrt{3^x}$. Тогда $t^2 - 10t + 9 \geq 0$ и $\left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 1, \\ t \geq 9 \end{array}\right.$.

Т.е. $D(f) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

2. Нули функции $f(x)$: $\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}=0$.

Получаем $x=2, 2\notin D(f), x=0$ или $x=4$.

3. Промежутки знакопостоянства функции $f(x)$: $f(-1)<0$, $f(5)>0$.

Отсюда $f(x)\geq 0$ при всех значениях $x\in\{0\}\cup[4;+\infty)$.

Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

Метод введения новой переменной.

Пример.

Решите неравенство $\dfrac{1}{2^x-1}<\dfrac{1}{1-2^{x-1}}$.

Решение.

Сделаем замену $2^{x-1}=y$. Тогда $\dfrac{1}{2y-1}<\dfrac{1}{1-y}\Leftrightarrow\dfrac{2-3y}{(2y-1)(1-y)}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{3}<y<1. \end{array}\right.$

$$\text{Итак, }\left[\begin{array}{l} 2^{x-1}<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{3}<2^{x-1}<1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^{x-1}<2^{-1}, \\ \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)<x-1<0; \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<0, \\ \log_2\left(\dfrac{4}{3}\right)<x<1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(\log_2 4/3;1)$.

Пример.

Решите неравенство $\log_x(2x)\leq\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

Решение.

$$\log_x(2x)\leq\sqrt{\log_x(2x^3)}\Leftrightarrow\log_x 2+1\leq\sqrt{\log_x 2+3}.$$

Сделаем замену $\log_x 2 = y$. Получим $y+1 \le \sqrt{y+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+1<0, \\ y+3 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y+1 \ge 0, \\ y+3 \ge (y+1)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le y < -1, \\ -1 \le y \le 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow -3 \le y \le 1.$$

Итак, исходное неравенство равносильно следующему:

$$-3 \le \log_x 2 \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 > x > 0, \\ x^{-3} \ge 2, \\ x \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ x^{-3} \le 2, \\ x \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \sqrt[3]{1/2}, \\ x \ge 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \sqrt[3]{1/2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Метод рационализации

(метод декомпозиции, метод замены множителей, метод замены функции, правило знаков, метод логических схем равносильных высказываний)

Преимущества этого метода заключается в сокращении объема выкладок при переходе к рациональному неравенству.

Итак, заменяем сложное выражение $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Выделим некоторые выражения $F(x)$и соответствующие им рационализирующие выражения $G(x)$, где f, g, h, p, q- выражения с переменной x $(h > 0; h \ne 1; f > 0; g > 0)$, a - фиксированное число $(a > 0; a \ne 1)$.

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f - \log_a g$ $\log_a f - 1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f - \log_h g$ $\log_h f - 1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h \ \ (g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ \ (h>0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h \ \ (f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Некоторые следствия (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f \cdot \log_p q \vee 0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(q-1) \vee 0$;
- $\log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1) \vee 0$;
- $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0$;
- $\dfrac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \dfrac{f-g}{p-q} \vee 0.$

Пример 1

Решите неравенство $\left|x^2 - 8x + 15\right| \leq \left|15 - x^2\right|$.

Решение.

$$\left|x^2-8x+15\right|-\left|15-x^2\right|\le 0,$$

$$\left(x^2-8x+15\right)^2-\left(15-x^2\right)^2\le 0,$$

$$\left(x^2-8x+15-15+x^2\right)\left(x^2-8x+15+15-x^2\right)\le 0,$$

$$x\cdot(x-4)\cdot(4x-15)\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{15}{4}\right]\cup[4;+\infty).$$

Ответ: $\left[0;\frac{15}{4}\right]\cup[4;+\infty)$.

Пример 2

Решите неравенство $\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|}\ge 0.$

Решение.

$$\frac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{(x-2)^2-(2x+2)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{x(x+4)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+2}{x+4}\ge 0,\\ x\ne 0;\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup[-2;0)\cup(0;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-4)\cup[-2;0)\cup(0;+\infty)$.

Пример 3

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0;$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1}}\le 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-1)-4(1-x)}{(x+7)-1} \le 0, \\ x^2-1 \ge 0, \\ 1-x \ge 0, \\ x+7 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x+6} \le 0, \\ x^2 \ge 1, \\ -7 \le x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+5)(x-1)}{x+6} \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} -7 \le x \le -1 \\ x = 1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $[-7;-6)\cup[-5;-1]\cup\{1\}$.

Пример 4

Решите неравенство $\left(1-\dfrac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \ge 1.$

Решение.

На множестве $1-\dfrac{2x}{5}>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$, исходное неравенство равносильно $-\dfrac{2x}{5}\left(7+11x-6x^2\right)\ge 0$.

$x(2x+1)(3x-7)\ge 0.$

Решая последнее неравенство методом интервалов и учитывая ограничение, приходим к ответу: $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left[\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{2}\right)$.

Пример 5

Решите неравенство $\left(4^{x+1}+2^{x+1}-1\right)^{x^2-x} \ge 1.$

Решение.

Множество, на котором определено неравенство, находится из условия $4^{x+1}+2^{x+1}-1>0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x+1}>0, \\ t^2+t-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow t>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x>-2+\log_2\left(\sqrt{5}-1\right).$

Произведем рационализацию неравенства $\left(4^{x+1}+2^{x+1}-1\right)^{x^2-x} \ge 1$:

$$\left(4^{x+1}+2^{x+1}-2\right)\left(x^2-x\right)\geq 0,$$

$$\left(2^{x+1}-1\right)\left(2^{x+1}+2\right)x(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow \left(2^{x+1}-1\right)x(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)x(x-1)\geq 0.$$

Из последнего неравенства получаем $x\in[-1;0]\cup[1;+\infty)$. Все это множество принадлежит области определения, а потому оно и является ответом.

Ответ: $[-1;0]\cup[1;+\infty)$.

Пример 6

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^4-2}-1}{x+1}\leq x-1$.

Решение.

Находим область определения неравенства $x\in\left(-\infty;-\sqrt[4]{2}\right]\cup\left[\sqrt[4]{2};+\infty\right)$. (1)

Далее неравенство преобразуем к виду $\dfrac{\sqrt{x^4-2}-x^2}{x+1}\leq 0$ и совершаем переход:

$$\frac{x^4-2-x^4}{x+1}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow x>-1.$$

Пересекая полученное множество с (1), приходим к ответу: $x\geq\sqrt[4]{2}$.

Ответ: $\left[\sqrt[4]{2};+\infty\right)$.

Пример 7

Решите неравенство $\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\dfrac{6}{x+1}\right)\geq -1$.

Решение.

Неравенство определено для значений переменной, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases}3-x>0,\\ 3-x\neq 2,\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<3,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

При этих значениях x равносильны преобразования $\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{x+1}{6}\right)\le 1$

$$\left(\frac{3-x}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{6}-\frac{3-x}{2}\right)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\ge 0.$$

Пересечение полученного множества $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$ с областью определения данного неравенства дает ответ $x\in(-1;1)\cup[2;3)$.

Ответ: $(-1;1)\cup[2;3)$.

Пример 8

Решите неравенство $\log_{5-4x-x^2}\left(5-9x-2x^2\right)\le \log_{1-x}(1-2x)$.

Решение.

Разложим квадратные трехчлены на линейные множители, тогда исходное неравенство можно переписать в виде $\log_{(x+5)(1-x)}\left((x+5)(1-2x)\right)\le \log_{1-x}(1-2x)$.

Оно определено при $\begin{cases} -5<x<\frac{1}{2}, \\ x\ne 0, \\ (1-x)(x+5)\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<\frac{1}{2}, \\ x\ne 0, \\ x^2+4x-4\ne 0. \end{cases}$

Переходя к основанию $(1-x)$, имеем $\frac{\log_{1-x}(x+5)+\log_{1-x}(1-2x)}{1+\log_{1-x}(x+5)}-\log_{1-x}(1-2x)\le 0$

$$\frac{\log_{1-x}(x+5)\cdot\left(\log_{1-x}(1-2x)-1\right)}{\log_{1-x}\left((x+5)(1-x)\right)}\ge 0.$$

Используя теперь схему рационализации, получим рациональное неравенство

$$\frac{(-x)(x+4)(-x)(-3x)}{(-x)\left(-x^2-4x+4\right)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+4)}{x^2+4x-4}\le 0,$$

которое равносильно данному на его множестве определения.

Таким образом, $\begin{cases} -5 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ \dfrac{x+4}{x^2+4x-4} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-5;-2-2\sqrt{2}\right) \cup \left[-4;0\right) \cup \left(0;\dfrac{1}{2}\right).$

Ответ: $\left(-5;-2-2\sqrt{2}\right) \cup \left[-4;0\right) \cup \left(0;\dfrac{1}{2}\right).$

Использование свойств функции.

а) область определения функции

Пример

Решите неравенство $\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0$

Решение.

Область определения неравенства задается условиями: $\begin{cases} x^2-6x+5 \ge 0, \\ 12x-2x^2-10 \ge 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=5 \end{array}\right.$.

При $x=1$ получаем, что исходное неравенство обращается в неверное неравенство $0>0$.

При $x=5$ имеем верное неравенство $\dfrac{1}{5}>0$.

Ответ: 5.

б) ограниченность функции

Пример 1

Решите неравенство $\log_5 x \le \sqrt{1-x^4}$

Решение.

Область определения неравенства задается условиями: $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x \leq 0,$ а $\sqrt{1 - x^4} \geq 0.$

Следовательно, решением этого неравенства является промежуток $(0;1].$

Ответ: $(0;1].$

Пример 2.

Решите неравенство $5^{-|x-2|} \cdot \log_2\left(4x - x^2 - 2\right) \geq 1.$

Решение.

Так как $0 < 5^{-|x-2|} \leq 1$ и $\log_2\left(4x - x^2 - 2\right) = \log_2\left(2 - (x-2)^2\right) \leq 1,$

приходим к системе $\begin{cases} \log_2\left(4x - x^2 - 2\right) = 1, \\ 5^{-|x-2|} = 1. \end{cases}$ Получаем: $x = 2.$

Ответ: 2.

<u>в) монотонность функции</u>

Пример 1

Решите неравенство $\sqrt{x-1} + 2^x + \log_2 x \geq 2.$

Решение.

Область определения данного неравенства есть промежуток $[1;+\infty).$

Функция $y = \sqrt{x-1} + 2^x + \log_2 x$ возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Но при $x = 1$ функция $y(x)$ принимает значение 2. Таким образом, исходное неравенство выполняется на всей области определения.

Ответ: $[1;+\infty).$

Пример 2

Решите неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x$

Решение.

Пусть $f(x)=\sqrt{4-x}-2$, $g(x)=x|x-3|+4x$, тогда $f(x)\le g(x)$.

Функция $f(x)=\sqrt{4-x}-2$ определена на луче $(-\infty;4]$ и убывает, а функция $g(x)=\begin{cases}7x-x^2, x\le 3\\ x^2+x, x\ge 3\end{cases}$ возрастает на всей прямой. Поскольку $f(0)=g(0)$, то исходное неравенство равносильно условию $0\le x\le 4$.

Ответ: $[0;4]$

Ниже приведены три самостоятельных работы на тему «Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции». Задания, соответствующие заданиям С1 и С3, будут представлены в разделе 4.

Самостоятельная работа №1

Вариант 1	Вариант 2
1. Решите уравнение: $\sin x = x^2 + 2x + 2$	**1.** Решите уравнение: $\cos x = x^2 - 2x + 2$
2. Решите уравнение: $\sqrt{9+2\sin x} + 4\sqrt{\sin x} = \cos\frac{x}{2} + 2$	**2.** Решите уравнение: $\left(\sqrt{4+\sin x} - \sqrt{\sin x}\right)\cos\frac{x}{2} = 2$
3. Решите уравнение: $3^{\sin x} = 4 - \cos^2\left(\frac{4}{3}x\right)$	**3.** Решите уравнение: $2^{\lvert\cos 2x\rvert} = \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sqrt{2}}$
4. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5x-6} + \ell og_2\sqrt{x^2-2x+5} = 1$	**4.** Решите уравнение: $\sqrt{x^2+2x-8} + \ell og_3\sqrt{x^2-4x+13} = 1$
5. Найти наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству: $4^x + 6\cdot 13^x \geq 13240$	**5.** Найти наибольшее целое число, не удовлетворяющее неравенству: $5^x + 4\cdot 3^{x+1} \geq 6100$

Самостоятельная работа №2

<table>
<tr>
<td>

Вариант 1

1. Найти D(y):

$$y=\sqrt{x^2-6x+5}+\frac{1}{\sqrt{x+2}},$$

$$y=\sqrt{|x-2|(x-14)}, \quad y=\sqrt{x|x-1|-2}$$

2. Доказать, что при любых значениях x, y, z выполняется неравенство $x^2+4y^2-6x+4y+10+z^2\geq 0$. Когда выполняется равенство?

3. Доказать, что при любых значениях a и b выполняется неравенство

$$a^2+b^2+ab+2a-2b+4\geq 0$$

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+y^3=\frac{7}{2}x, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

</td>
<td>

Вариант 2

1. Найти D(y): $y=\sqrt{2-x^2}-\frac{2}{\sqrt{x^2}}$,

$$y=\sqrt{(x-12)(x-10)^2}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{|2x-3|-x^2}}$$

2. Доказать, что при положительных значениях x, y выполняется неравенство $(x+2)(x+y)(y+2)\geq 16xy$. Когда выполняется равенство?

3. Доказать, что при любых значениях x и y выполняется неравенство

$$x^2+10y^2-6xy+10x-26y+30>0$$

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+y^3=9y, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

</td>
</tr>
</table>

Самостоятельная работа №3

Вариант №1 **1.** $y(x)=\dfrac{x-3}{4-x}$. Найти касательную, проведённую в точке $x_0=3$. Найти расстояние между этой касательной и касательной, параллельной ей. Построить графики. **2.** $\eta(x)=x^2-2x$. Найти касательные, проходящие через точку (2; -4). Найти a и построить. **3.** Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции $y=(x^2+5x+7)e^{-x}-3$. **4.** Исследуйте функцию $y=e^{x+2}-x-6$ и постройте её график.	**Вариант №2** **1.** $y(x)=\dfrac{2-x}{x+3}$. Найти касательную, проведённую в точке $x_0=-4$. Найти расстояние между этой касательной и касательной, параллельной ей. Построить графики. **2.** $\varphi(x)=x^2-ax$. $y=x-4$ – касательная к параболе. Найти a и построить. **3.** Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции $y=(x^2-7x+7)e^{-x}-1$. **4.** Исследуйте функцию $y=x+4-e^{x+1}$ и постройте её график.

Методическое обеспечение раздела 2

Геометрия

1. Теорема Стюарта и параметры треугольников

Теорем и задач, которые вошли в учебники геометрии довольно много. Некоторые из них заслуживают определённого внимания, так как обладают некоторой общностью и могут помочь в сложных заданиях ЕГЭ.

Формулы, позволяющие определить медианы и биссектрисы треугольника по заданным сторонам треугольника, являются частными случаями более общей формулы, которая является основой ***теоремы Стюарта*** (Мэтью Стюарт, шотландский астроном и математик , 1717-1785). Рассмотрим треугольник ABC (см. рис.1), в котором $AB = c$, $BC = a$, $BK = x$, $AK = p$, $KC = q$, $AC = b$. Задача состоит в том, чтобы по заданным четырём параметрам – a, c, p, q – определить отрезок BK.

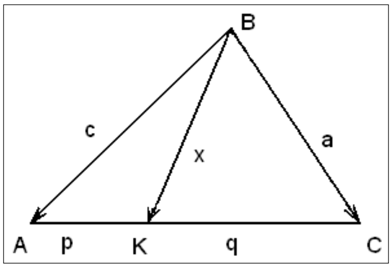


Рис.1

Воспользуемся известным равенством для векторов $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BK} = \vec{x}$: $\boxed{\overrightarrow{BK} = \frac{p}{p+q}\cdot\vec{a} + \frac{q}{p+q}\cdot\vec{c}}$, из которого после возведения в квадрат получаем выражение

$$x^2 = \frac{p^2}{(p+q)^2}\cdot a^2 + \frac{q^2}{(p+q)^2}\cdot c^2 + \frac{2pq}{(p+q)^2}\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

С другой стороны, $2\vec{a}\cdot\vec{c} = a^2 + c^2 - b^2$.

Таким образом, после подстановки и некоторых преобразований, можно получить формулу для определения отрезка BK: $\boxed{x^2 = \frac{p}{p+q}\cdot a^2 + \frac{q}{p+q}\cdot c^2 - pq}$.

Тот же результат можно получить, если записать теорему косинусов для треугольников ABK и ABC, выбрав общий угол A.

Рассмотрим частные случаи этой формулы.

1). Пусть BK является медианой. Тогда $p = q = \frac{b}{2}$ и имеем формулу для расчета медиан $\boxed{m^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$.

2). Пусть BK является биссектрисой. Тогда $p/q = c/a$ и получаем формулу для биссектрисы $\boxed{\ell^2 = ac - pq}$.

3). Если BK – отрезок в равнобедренном треугольнике, то в этом случае $\boxed{x^2 = a^2 - pq}$, где a – боковая сторона треугольника.

Следующие формулы для биссектрисы являются необходимым дополнением к решению треугольников.

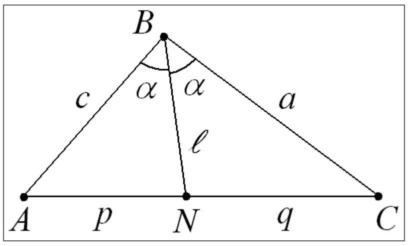


Рис. 2

Формула $\boxed{\ell = \dfrac{2ac \cdot \cos\alpha}{a+c}}$ легко получается из простого соотношения $S_{ABN} + S_{BNC} = S_{ABC}$ (все обозначения соответствуют рис.2).

Формула для биссектрисы, выраженная через три стороны треугольника, получается после ряда преобразований. Так как $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 2\alpha = (a+c)^2 - 4ac \cdot \cos^2\alpha$, откуда $\cos^2\alpha = \dfrac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}$, то первую формулу для биссектрисы легко преобразовать в следующую: $\ell^2 = \dfrac{4a^2c^2\cos^2\alpha}{(a+c)^2} = \dfrac{ac}{(a+c)^2} \cdot \left((a+c)^2 - b^2\right) = ac - \dfrac{acb^2}{(a+c)^2}$. Таким образом, имеем

$$\boxed{\ell = \sqrt{ac \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}}.$$

Учитывая, что $p/q = c/a = (b-q)/q$, получаем ещё ряд полезных соотношений: $q = \dfrac{ab}{a+c}$, $p = \dfrac{bc}{a+c}$ включая и уже полученный ранее результат $\ell^2 = ac - pq$.

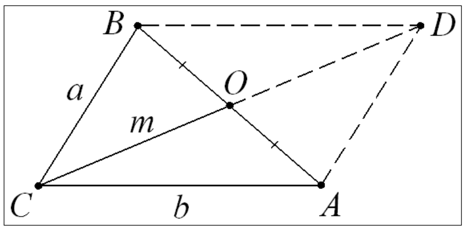


Рис. 3

Формула для медианы, полученная ранее, также выводится из других источников. Например, следует из известного равенства для параллелограмма $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, если в нём принять $AB = d_1 = c$, $CD = d_2 = 2m$ (см. рис.3). В результате получаем следующее выражение $\boxed{m^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}}$.

Этот же результат можно получить, применяя теорему косинусов для треугольников ABC и AOC, выбрав общий угол OAC.

При решении треугольников, а также в теме “Правильные многоугольники” довольно часто встречаются тригонометрические функции 15°, 22,5°, 18°, 36° и других. Поэтому таблицы функций для 30°, 45°, 60°, 90° следует дополнить и этими данными. Если для 15°, 22,5° можно воспользоваться обычными формулами половинного угла, то для функций 18°, 36° формулой синуса тройного угла: $\sin 36^0 = \cos 54^0 = \cos(3 \cdot 18^0)$, $2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0$, $4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0$, $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^0$,

$\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°$.

Таким образом,

дополнение к таблице тригонометрических функций имеет вид:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
15°	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22,5°	$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
36°	$\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

При решении планиметрических или стереометрических задач иногда пользуются формулой Герона. Как правило, в этом случае стороны треугольника соответствуют сторонам так называемого рационального треугольника. Это треугольник, у которого стороны, площадь и радиусы вписанной и описанной окружностей представляют собой рациональные числа. Приведем ряд формул, с помощью которых всегда можно воссоздать рациональный треугольник.

Итак, пусть даны $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$. Далее воспользуемся тем, что $\sin A = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \dfrac{c}{2R}$.

Учитывая то, что $S = \dfrac{abc}{4R}$ и $S = pr$, при рациональных значениях $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$ и R получаем рациональные значения *a*, *b*, *c* и *S*. Например, пусть $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$, тогда $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{1-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \dfrac{11}{7} \Rightarrow \sin A = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{16}} = \dfrac{8}{17}$, $\sin B = \dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{5}$, $\sin C = \dfrac{2\cdot\frac{11}{7}}{1+\frac{121}{49}} = \dfrac{77}{85}$. Теперь пусть $R = 85/2$, тогда будет $a = 40$, $b = 51$, $c = 77$, $S = 924$ и $r = 11$.

Следует отметить, что в случае иррациональных сторон треугольника лучше воспользоваться другой формулой площади, легко получаемой из формулы Герона:

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}}.$$

В заключение, приведём небольшую таблицу рациональных треугольников

№	**a**	**b**	**c**	**p**	**S**	**h_a**	**R**	**r**
1.	3	25	26	27	36	24	325/24	4/3

2.	44	35	75	77	462	21	125/2	6
3.	4	13	15	16	24	12	65/8	3/2
4.	4	53	51	54	90	45	901/30	5/3
5.	6	29	25	30	60	20	145/8	2
6.	7	15	20	21	42	12	25/2	2
7.	7	65	68	70	210	60	221/6	3
8.	8	29	35	36	84	21	145/6	7/3
9.	9	10	17	18	36	8	85/8	2
10.	9	73	80	81	216	48	365/6	8/3
11.	21	10	17	24	84	8	85/8	7/2
12.	11	13	20	22	66	12	65/6	3
13.	11	25	30	33	132	24	125/8	4
14.	12	17	25	27	90	15	85/6	10/3
15.	14	13	15	21	84	12	65/8	4

2. Теорема Чевы. Пересечение высот в треугольнике.

В обязательный минимум содержания основных образовательных программ профильного уровня по геометрии входят известные теоремы планиметрии: теорема Чевы и теорема Менелая. Но эти теоремы интересны ещё и своими следствиями. Прежде обратимся к самой теореме Чевы (Джованни Чева, итальянский математик, 1648-1734).

Теорема Чевы

Если на сторонах *AB, BC, CA* треугольника *ABC* (рис.4) **взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда** $\boxed{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A}$ (*)

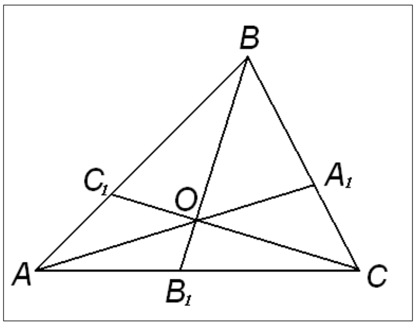


Рис.4

В основе доказательства прямой теоремы лежат следующие соображения. Пусть отрезки пересекаются в точке *O*, тогда $\dfrac{AB_1}{B_1C}=\dfrac{S_{AOB_1}}{S_{B_1OC}}=\dfrac{S_{ABB_1}}{S_{B_1BC}}=\dfrac{S_{ABB_1}-S_{AOB_1}}{S_{B_1BC}-S_{B_1OC}}=\dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$. При выводе был использован принцип равных отношений: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a+c}{b+d}$.

Таким образом, имеем: $\dfrac{AB_1}{B_1C}=\dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$, $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$, $\dfrac{A_1C}{BA_1}=\dfrac{S_{AOC}}{S_{AOB}}$. Перемножая эти выражения, получаем соотношение (*).

В обратной теореме на сторонах треугольника взяты точки C_1, A_1, B_1 так, что выполняется равенство (*). Пусть точка $O=AA_1\cap CC_1$. Проведём BO, которая пересекается с AC в точке B_2. По доказанному выше, имеем равенство: $AB_2\cdot CA_1\cdot BC_1=B_2C\cdot A_1B\cdot C_1A$. Поделив оба выражения друг на друга почленно, окончательно приходим к выводу, что $\dfrac{AB_1}{B_1C}=\dfrac{AB_2}{B_2C}$, т.е. точки B_1 и B_2 делят сторону AC в одном и том же отношении, что означает совпадение этих точек и исходные отрезки пересекаются в одной точке.

Воспользовавшись этим результатом, докажем теперь теорему о пересечении чевиан.

Теорема о пересечении чевиан

Чевианы в треугольнике ABC точкой пересечения O делятся в отношении

$\boxed{\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{BC_1}{C_1A}+\dfrac{BA_1}{A_1C}}$**, считая от вершины.**

Имеем, с одной стороны: $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$ и $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$. Откуда следует, что: $\dfrac{BC_1}{C_1A}+\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{S_{BOC}+S_{AOB}}{S_{AOC}}=\dfrac{S_{ABC}-S_{AOC}}{S_{AOC}}$. С другой стороны, получаем такой же результат из другого условия: $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{BB_1-OB_1}{OB_1}=\dfrac{S_{ABC}-S_{AOC}}{S_{AOC}}$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим частные случаи этой формулы. В случае медиан получаем классический результат: $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{BC_1}{C_1A}+\dfrac{BA_1}{A_1C}=1+1=2$ или $\boxed{\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{2}{1}}$.

В случае пересечения биссектрис следует учесть, что $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{BC}{AC}$ и $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{BA}{CA}$. Таким образом, имеем: $\boxed{\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{BC + BA}{CA}}$.

При пересечении высот следует учесть, что каждый отрезок можно записать через высоты и углы треугольника. А именно, $\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{BC_1}{C_1A} + \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CC_1 \cdot ctgB}{CC_1 \cdot ctgA} + \dfrac{AA_1 \cdot ctgB}{AA_1 \cdot ctgC}$. В результате окончательно получаем $\boxed{\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{tgA + tgC}{tgB}}$. Конечно, данный результат можно получить и другим путём, не используя теорему о чевианах. Однако, такой подход наиболее оптимален.

Рассмотрим задачи, где используется полученное выше выражение для высот.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ортоцентр делит высоту, опущенную на основание треугольника, в отношении $\dfrac{m}{n}$, считая от вершины. Найдите углы треугольника.

Решение

Пусть угол при основании треугольника равен α, тогда тангенс угла при вершине треугольника равен $tg(180° - 2\alpha) = -tg(2\alpha)$. Таким образом, имеем уравнение $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2tg\alpha}{-tg(2\alpha)} = tg^2\alpha - 1$. Откуда следует, что $tg\alpha = \sqrt{1 + \dfrac{m}{n}}$.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Известно, что: $\dfrac{AO}{OA_1} = \sqrt{3} + 1$, $\dfrac{BO}{OB_1} = 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$.

1). Найдите отношение $\dfrac{CO}{OC_1}$; 2). Найдите углы треугольника.

Решение

Для удобства введём обозначения: $tgA = a$, $tgB = b$, $tgC = c$. Запишем исходные формулы: $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{b + c}{a}$, $\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{a + c}{b}$, $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{a + b}{c}$. Таким образом, получаем систему уравнений: $\begin{cases} b + c = a \cdot (\sqrt{3} + 1) \\ a + c = 2b \cdot (\sqrt{3} + 1) \end{cases}$, откуда следует связь $\begin{cases} c = b \cdot (2 + \sqrt{3}) \\ a = b \cdot \sqrt{3} \end{cases}$. Подставив эти выражения в формулу $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{a + b}{c}$, получаем в результате: $\dfrac{CO}{OC_1} = \sqrt{3} - 1$. Так как между тангенсами есть связь: $a = -\dfrac{b+c}{1-bc}$, то, подставив равенство во вторую систему, получаем тангенсы углов треугольника: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 2+\sqrt{3}$ и, соответственно, углы треугольника: $\angle A = 60^0$, $\angle B = 45^0$, $\angle C = 75^0$.

Задача 3. В треугольнике ABC точка P – ортоцентр, угол ABC равен β, BP = a. Найдите радиус описанной окружности треугольника.

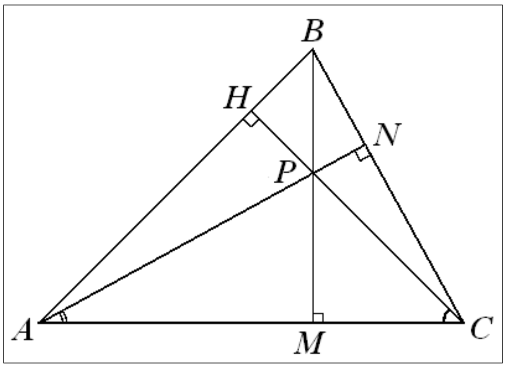


Рис. 5

Решение

Рассмотрим случай остроугольного треугольника (рис.5) и воспользуемся ранее полученной формулой $\dfrac{BP}{PM} = \dfrac{tgA + tgC}{tgB}$. Таким образом, имеем $PM = \dfrac{a \cdot tgB}{tgA + tgC}$.

С другой стороны $AC = AM + MC = PM \cdot (ctg\angle PAC + ctg\angle PCA) = PM \cdot (tgC + tgA) = a \cdot tgB$

и тогда $R = \dfrac{AC}{2\sin B} = \dfrac{a}{2\cos\beta}$.

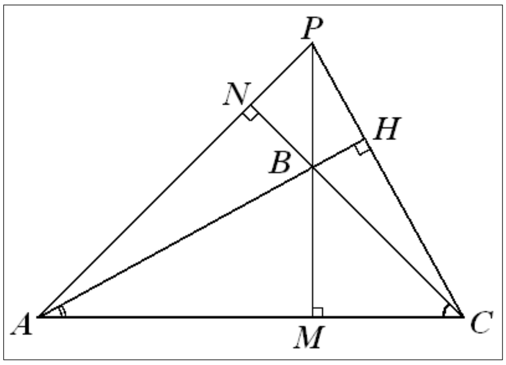


Рис. 6

Рассмотрим случай тупоугольного треугольника (рис.6) и воспользуемся формулой $\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{tg\angle PAC + tg\angle PCA}{tg\angle APC}$.

Из рисунка следует, что $\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{ctgC + ctgA}{tg(180^0 - B)}$.

Таким образом, имеем $BM = -\dfrac{a \cdot tgB}{ctgA + ctgC}$. С другой стороны,

$AC = AM + MC = BM \cdot (ctgC + ctgA) = -a \cdot tgB$ и тогда $R = \dfrac{AC}{2\sin B} = -\dfrac{a}{2\cos\beta}$.

Данная задача была предложена на олимпиаде «Будущие исследователи» в 2008г., а в ЕГЭ формата 2010г. она звучит следующим образом: «Высоты треугольника ABC пересекаются в точке P. Известно, что отрезок BP равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ABC». Из полученных формул следует, что угол равен либо 60^0 либо 120^0.

3. Решение треугольников

При повторении планиметрии в старших классах следует обратить внимание на задачи с элементами исследования. Рассмотрим ряд подобных задач.

Задача 1.

Дано:	*Решение.*
ΔABC, $b = 5$, $c = 10$, $S = 15$.	Из формулы для площади треугольника $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ выражаем $\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{3}{5}$. Тогда $\cos A = \pm 4/5$ (см. рис.7). Пользуясь теперь теоремой косинусов для треугольника ABC $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,
Найти: a.	

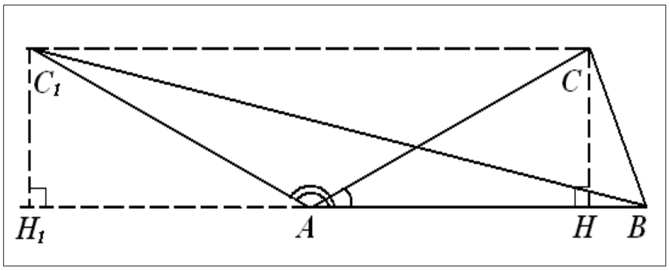


Рис. 7.

получаем возможные значения длины стороны a: $\left[\begin{array}{l} a^2 = 45, \\ a^2 = 205, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} a = 3\sqrt{5}, \\ a = \sqrt{205}. \end{array}\right.$

Для большей определенности задачи можно указывать – тупым или острым является угол A. Хотя, чтобы соответствовать стандарту ЕГЭ 2010, определённости как раз и не нужно. На рисунке наглядно показана разница между этими случаями.

Задача 2.

Дано:	*Решение.*
ΔABC, $\angle A = 30°$, $a = 17$, $b = 16$.	По теореме синусов для ΔABC $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, откуда $\sin B = \frac{b}{a}\sin A = \frac{16}{17}\cdot\frac{1}{2} = \frac{8}{17}$. Т.к. $b < a$, то $\angle B < \angle A$, поэтому $\cos B > 0$. Из основного тригонометрического тождества получаем $\cos B = \frac{15}{17}$. Теорема косинусов для ΔABC дает $c^2 + a^2 - 2ac\cos B = b^2$,
Найти: $\angle B$, c.	

откуда после подстановки получаем уравнение: $c^2 - 30c + 33 = 0$, откуда $c = 15 \pm 8\sqrt{3}$.

Как уже указывалось ранее, $\angle B < \angle A$, поэтому $\angle C > 120°$, следовательно, $c > a$ и $c > b$, значит, $c = 15 + 8\sqrt{3}$.

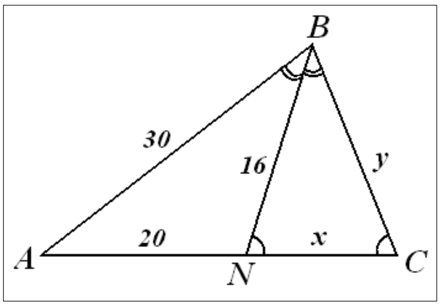


Рис.8.

Задача 3. Отрезок BN является биссектрисой треугольника ABC. Найдите NC, если AB = 30, AN = 20, BN = 16 и угол BNC равен углу BCA. (см. рис.8) (задача №536(б), Л.С. Атанасян и др. Геометрия 7-9 М.: Просвещение, издания до 2008г.)

Решение

По условию задачи следует, что сторона a = 16, следовательно, из пропорции $\frac{x}{20} = \frac{16}{30}$ находим, что $x = 10\frac{2}{3}$. Однако, из формулы для биссектрисы имеем следующее: $16^2 = 30 \cdot 16 - 20 \cdot x$ и $x = 11\frac{1}{5}$. При данных условиях можно получить и третье значение для отрезка, отличное от двух первых!? Задача некорректно сформулирована, так как в ней избыточное число данных. Уберём одно лишнее условие, например равенство углов BNC и BCA.

Составим систему уравнений с двумя неизвестными:

$\begin{cases} \frac{x}{20} = \frac{y}{30}, \\ 16^2 = 30 \cdot y - 20 \cdot x \end{cases}$, решением которой является система $\begin{cases} x = 10\frac{6}{25}, \\ y = 15\frac{9}{25} \end{cases}$. Исследование решений задачи можно продолжить последовательно исключая какое-либо данное.

Задача 4. Сумма двух сторон треугольника 613, 47 арш., третья сторона 263,546арш. Угол, противолежащий меньшей стороне, равен $47^0 56' 13''$. Определите прочие части треугольника и его площадь (одна из четырёх задач выпускного и одновременно вступительного экзамена в университет(!) в гимназиях в 1874г.).

Решение

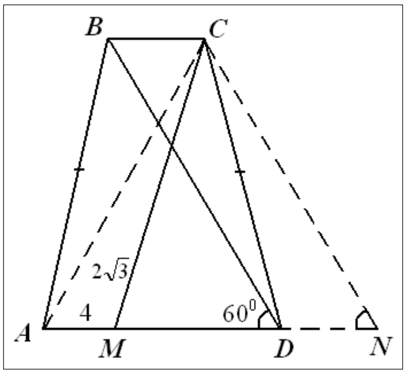
Упростим задачу, скорректировав численные данные: сумма двух сторон $m = 60$, косинус заданного угла $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, третья сторона $a = 28$. Пусть b меньшая сторона треугольника. Тогда имеем следующую систему уравнений: $\begin{cases} b + c = m, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \end{cases}$

Подставляя из первого уравнения сторону b во второе уравнение, получаем решение системы $\begin{cases} c = \dfrac{m^2 - a^2}{2(m - a\cos\alpha)}, \\ b = \dfrac{m^2 + a^2 - 2am\cos\alpha}{2(m - a\cos\alpha)} \end{cases}$. Учитывая, что $\begin{cases} b < a, \\ b < c \end{cases}$ получаем условия, которым должна удовлетворять сторона *a*: $\frac{m}{1+2\cos\alpha} < a < m\cdot\cos\alpha$. Следует отметить, что по условиям исходной задачи, получаем $\frac{m}{1+2\cos\alpha} \approx 262{,}178 < a = 263{,}546$! По новым данным получаем следующий результат: $\begin{cases} b = 27\frac{11}{27}, \\ c = 32\frac{16}{27} \end{cases}$, $S = 365\frac{1}{27}$.

Задача 5. В равнобедренной трапеции с основаниями *AD* и *BC* угол *BDA* равен 60^0, точка $M \in AD$, $AM = 4$, $\mathrm{CM} = 2\sqrt{3}$. Найти площадь трапеции (см. рис.9).

Решение

Построим $CN \,//\, BD$ и получим равносторонний треугольник *ACN*, площадь которого равна площади трапеции. Пусть сторона треугольника равна *d*, тогда воспользуемся теоремой Стюарта для равнобедренного треугольника: $(2\sqrt{3})^2 = d^2 - 4(d-4)$. Получаем значение $d = 2$ и соответственно площадь трапеции $S = \sqrt{3}$. Следует обратить внимание на то, что AM > AN. *Рис. 9.*



Таким образом, точка М вне основания трапеции. Рассматривая два варианта расположения точки М, можно доказать, что результат не зависит от положения точки.

4. Формулы площади четырёхугольника

Попробуем сконструировать формулы площади четырёхугольника, исходя из аналогии с формулами площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

Итак, найдём аналог первой формулы в списке. Пусть дан четырёхугольник *ABCD* (рис. 10), в котором *BM, ON, CK* –высоты на основание *AD*. Составим отношение площадей треугольников, составляющих четырёхугольник: $\frac{S_{ACD}}{S_{AOD}} = \frac{CK}{ON}$. Учитывая подобие треугольников *ACK* и *AON*, имеем: $\frac{CK}{ON} = \frac{AC}{AO}$.

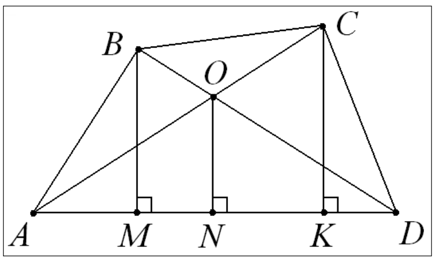


Рис. 10

Таким образом, получаем следующее равенство:

$\dfrac{AC}{AO}=\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOB}}=\dfrac{S_{ACD}}{S_{AOD}}$. Откуда следует соотношение: $\dfrac{S_{ABC}+S_{ACD}}{S_{AOB}+S_{AOD}}=\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABD}}=\dfrac{CK}{ON}$, из

которого, с учётом площади треугольника *ABD*, получаем искомую формулу для площади четырёхугольника $\boxed{S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot\dfrac{BM\cdot CK}{ON}}$

Следующие формулы площади четырёхугольника аналогичны последним двум формулам списка. Если четырёхугольник вписан в окружность, то каждый треугольник из четырёх – *ABC*, *BCD*, *CDA*, *ABD* (см. рис. 10) – вписан в ту же окружность. Таким образом, площади треугольников выражаются через стороны и радиус *R*: $S_{ABC}=\dfrac{abd_1}{4R}$,

$S_{BCD}=\dfrac{bcd_2}{4R}$, $S_{CDA}=\dfrac{cdd_1}{4R}$, $S_{DAB}=\dfrac{dad_2}{4R}$, где d_1, d_2 – диагонали.

Складывая попарно площади треугольников, имеем:

$$S=S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=\frac{(ab+dc)d_1}{4R},\quad S=S_{ABCD}=S_{BCD}+S_{ABD}=\frac{(bc+ad)d_2}{4R}.$$

Перемножив оба выражения, получаем формулу: $S=\dfrac{\sqrt{d_1d_2(ab+dc)(ad+bc)}}{4R}$, (6)

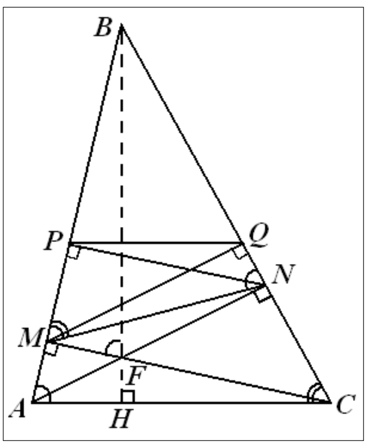
из которой, учитывая справедливость теоремы Птолемея, окончательно имеем формулу площади четырёхугольника: $\boxed{S=\dfrac{\sqrt{(ac+bd)(ab+dc)(ad+bc)}}{4R}}$

Площади треугольников *ABC*, *BCD*, *CDA*, *ABD* можно также выразить и следующим образом: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin B$, $S_{BCD}=\dfrac{1}{2}bc\sin C$, $S_{CDA}=\dfrac{1}{2}cd\sin D$, $S_{DAB}=\dfrac{1}{2}da\sin A$.

Так как четырёхугольник вписан в окружность, то $\sin B=\sin D$, $\sin A=\sin C$.

Складывая опять попарно треугольники, имеем: $ab+cd=\dfrac{2S}{\sin B}$, $bc+ad=\dfrac{2S}{\sin A}$.

Учитывая, что $d_1d_2=2S/\sin\varphi$ и подставляя полученные формулы в (6), после несложных преобразований получаем ещё одну формулу площади четырёхугольника: $\boxed{S=2R^2\sin A\sin B\sin\varphi}$.



Задача. В остроугольном треугольнике проведены высоты AN и CM. Далее проведены перпендикуляры $NP\perp AB$ $MQ\perp BC$. Отношение $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MPQN}}=\dfrac{81}{20}$, $MN=20$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC (см. рис.

11).

Решение *Рис.11*

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle ABC = \beta$. Четырёхугольник $MBNF$ можно вписать в окружность, следовательно, углы $\angle BFM = \angle BNM = \angle HFC = \alpha$. Аналогично $\angle BFN = \angle BMN = \angle HFA = \gamma$. Отсюда $PN = MN\sin\gamma$, $MQ = MN\sin\alpha$,

$S_{MPQN} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin(180^0 - \beta) = \frac{MN^2}{2}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Так как площадь треугольника

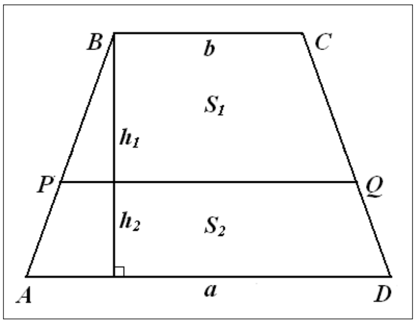
$S_{ABC} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MPQN}} = \frac{4R^2}{MN^2} = \frac{81}{20}$ и $R = 9\sqrt{5}$.

5. Решение избранных задач

1. На боковых сторонах AB и CD трапеции отмечены точки P и Q соответственно, причём PQ//AD. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $\frac{m}{n}$. Найдите PQ, если AD равно a и BC равно b.

Решение

Пусть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$ и $PQ = x$, тогда $\begin{cases} S_1 = \frac{b+x}{2}h_1 = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2) \\ S_2 = \frac{a+x}{2}h_2 = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2) \end{cases}$. После преобразований имеем $\begin{cases} \frac{h_2}{h_1} = \frac{b+x}{a+x}\cdot\frac{n}{m} \\ \frac{b+x}{2} = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\left(1+\frac{h_2}{h_1}\right) \end{cases}$.



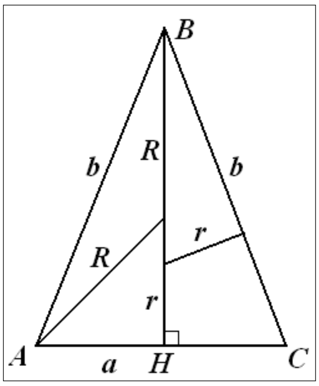
Окончательно получаем $x^2 = \frac{ma^2 + nb^2}{m+n}$. Так как возможен случай $\frac{S_1}{S_2} = \frac{n}{m}$, то имеем второй вариант ответа $x^2 = \frac{na^2 + mb^2}{m+n}$.

2. Отношение двух сторон равнобедренного треугольника равно $\frac{m}{n}$. Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружности в этот треугольник.

Решение

Так как $R = \dfrac{ab^2}{4S}$, а $r = \dfrac{2S}{2b+a}$, то $\dfrac{R}{r} = \dfrac{ab^2(2b+a)}{8S^2} = \dfrac{2ab^2(2b+a)}{a^2(4b^2-a^2)} = \dfrac{2b^2}{a(2b-a)} = \dfrac{2}{\frac{a}{b}\left(2-\frac{a}{b}\right)}$.

Таким образом, получаем два возможных ответа: $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2}{\frac{m}{n}\left(2-\frac{m}{n}\right)}$ либо $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2}{\frac{n}{m}\left(2-\frac{n}{m}\right)}$.



3. Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке C.

Найдите BC, если известно, что AB = a и $\dfrac{r}{R} = \dfrac{m}{n}$.

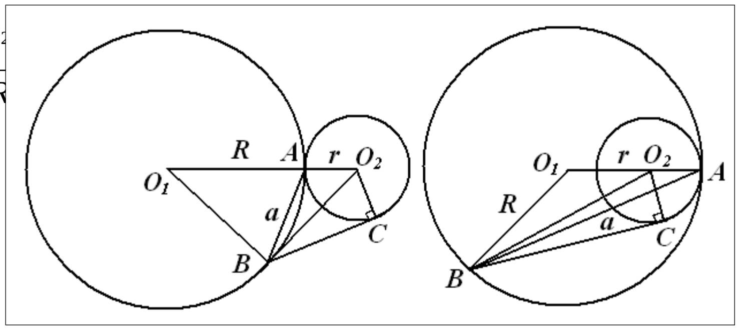
Решение

Обозначив угол AO_1B за α, запишем теорему косинусов для треугольника AO_1B: $a^2 = 2R^2(1-\cos\alpha)$ и треугольника O_1O_2B: $BC^2 + r^2 = (R\pm r)^2 + R^2 - 2R(R\pm r)\cos\alpha$.

Отсюда получаем выражение для BC:

$$BC^2 = \pm 2Rr + 2R^2 - 2R(R\pm r)\left(1-\frac{a^2}{2R^2}\right)$$

или $BC^2 = a^2\left(1\pm\dfrac{r}{R}\right)$, где знак плюс соответствует случаю внешнего касания окружностей, а знак минус случаю внутреннего касания.



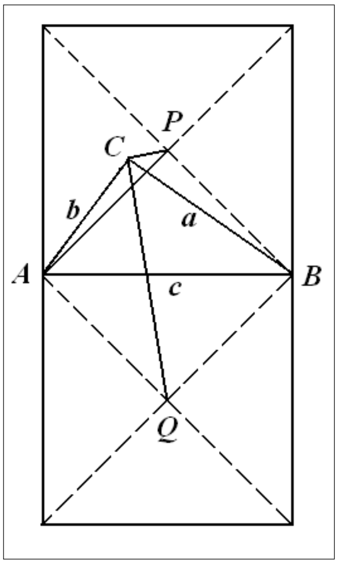
4. На гипотенузе треугольника *ABC* с катетами *a* и *b* построен квадрат. Найти расстояние от вершины треугольника *C* до точки пересечения диагоналей квадрата.

Решение

Так как углы AQB и ACB прямые, то четырёхугольник можно вписать в окружность.

Это означает, что применима теорема Птолемея. Обозначив $CQ = x$, запишем равенство: $x\cdot c = a\cdot\dfrac{c}{\sqrt{2}} + b\cdot\dfrac{c}{\sqrt{2}}$. Во второй конфигурации четырёхугольник также вписан в окружность, так как прямые углы ACB и APB опираются на диаметр. Таким образом, имеем равенство $a\cdot\dfrac{c}{\sqrt{2}} = b\cdot\dfrac{c}{\sqrt{2}} + c\cdot x$. Ответ можно записать в форме $x = \dfrac{a\pm b}{\sqrt{2}}$.

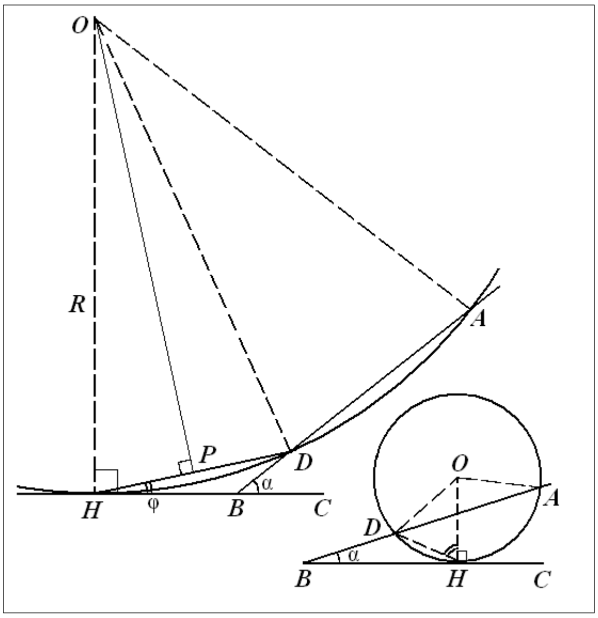
5. На стороне AB угла ABC, равного 30^0, взята точка D, что AD = 2, и BD = 1. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC (демо-2010).



Решение

По теореме о касательной и секущей $BH^2 = AB \cdot BD$ получаем $BH = \sqrt{3}$. Находим DH по теореме косинусов в двух случаях $DH^2 = BH^2 + BD^2 \pm 2BH \cdot BD \cdot \cos\alpha$. В случае касания внутри угла $DH = 1$ и треугольник BDH тогда равнобедренный, т.е. угол DHB равен 30^0, а угол OHD равен 60^0. Но тогда треугольник OHD равносторонний и радиус равен 1. В случае внешнего касания $DH = \sqrt{7}$. Из треугольника OPH получаем $R = \dfrac{HP}{\cos(\angle PHO)} = \dfrac{HP}{\cos(90^0 - \varphi)} = \dfrac{HP}{\sin\varphi}$. Косинус угла φ получим из теоремы косинусов для треугольника HBD: $\cos\varphi = \dfrac{9}{2\sqrt{21}}$. Отсюда

$\sin\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ и $R = 7$.

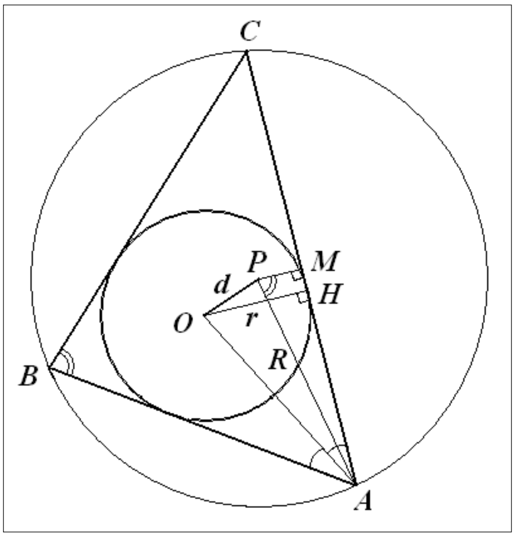


2. Леонард Эйлер – величайший математик всех времён и народов

Леонард Эйлер (1707-1783) родился в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. Первые уроки Леонард получил от отца, а учась в последних классах гимназии, он посещал лекции по математике в Базельском университете, которые читал Иоганн Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам Бернулли беседует с талантливым студентом. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом. В 1723 г. Эйлер получил степень магистра искусств. В 1727 г. он предпринял попытку занять кафедру физики в родном университете, но ему это не удалось. Он принял решение ехать в Петербург, куда его звали работавшие там Даниил и Николай Бернулли. В Петербурге Эйлер сложился как великий учёный. К 35 годам из-за постоянных перегрузок Эйлер подорвал своё здоровье. Он перенапряг зрение и ослеп на один глаз. В 1740 году из-за проблем со здоровьем и по причине политической неустойчивости в России он едет в Берлин, куда его приглашает король Фридрих II. Со временем ситуация в России изменилась, на трон взошла Екатерина II, которой очень хотелось вернуть великого учёного. В 1766 г. Эйлер возвращается в Россию. Вскоре после приезда учёный полностью лишается зрения. Несмотря на потерю зрения, работоспособность Эйлера не снизилась. Во второй петербургский период им написана половина всех его работ. Умер Эйлер в 1783 г., оставив огромное научное наследие по математике, физике, астрономии, которое до сих пор издаётся в Швейцарии. Похоронен учёный в Александро-Невской Лавре. Его могила недалеко от могилы М.В. Ломоносова.

Ниже приведены несколько теорем и формул, носящих имя Эйлера.

Расстояние между центрами вписанной и описанной окружности в треугольнике



Пусть в треугольнике ABC точка O – центр вписанной окружности, точка P – центр описанной окружности, угол CBA равен β, а угол BAC равен α, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности. Из треугольников AOH, APM имеем следующие равенства:

$$AO=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \angle PAM=90^0-\beta \text{ и } \angle PAO=\frac{\alpha}{2}-(90^0-\beta)=\frac{\alpha}{2}+\beta-90^0.$$

Запишем теорему косинусов для треугольника AOP: $d^2=R^2+\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2Rr\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Так как $\text{ÀÑ}=r\cdot\left(ctg\,\frac{\alpha}{2}+ctg\,\frac{\gamma}{2}\right)=2R\sin\beta$, где $\angle BCA=\gamma$, то

$$d^2=R^2-2Rr\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(ctg\,\frac{\alpha}{2}+ctg\,\frac{\gamma}{2}\right)}\right).$$

Рассмотрим выражение в скобках:

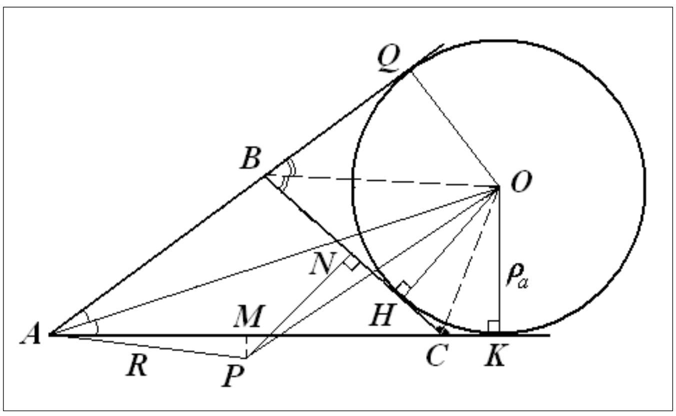
$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(ctg\,\frac{\alpha}{2}+ctg\,\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\beta\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(90^0-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(90^0+\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)-2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=1$$

Таким образом, получили известную формулу Эйлера: $\boxed{d^2=R^2-2Rr}$. Следствием из формулы является то, что в любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.

Расстояние между центрами вневписанной и описанной окружности в треугольнике



Пусть в треугольнике ABC точка O – центр вневписанной окружности, точка P – центр описанной окружности, угол CBA равен β, а угол BAC равен α, R – радиус описанной окружности, ρ – радиус вневписанной окружности. Из треугольников AOK, APM имеем следующие равенства:

$$AO=\frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \angle PAM=\beta-90^0 \text{ и } \angle PAO=\frac{\alpha}{2}+(\beta-90^0)=\frac{\alpha}{2}+\beta-90^0.$$

Запишем теорему косинусов для треугольника AOP: $d^2=R^2+\dfrac{\rho^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2R\rho\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Так как $BC=\rho\cdot\left(ctg\,\dfrac{180^0-\beta}{2}+ctg\,\dfrac{180^0-\gamma}{2}\right)=2R\sin\alpha$, где $\angle BCA=\gamma$, то $\rho=\dfrac{2R\sin\alpha}{tg\,\frac{\beta}{2}+tg\,\frac{\gamma}{2}}$

и $d^2=R^2+2R\rho\cdot\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(tg\,\frac{\beta}{2}+tg\,\frac{\gamma}{2}\right)}-\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. Рассмотрим выражение в скобках:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(tg\,\frac{\beta}{2}+tg\,\frac{\gamma}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

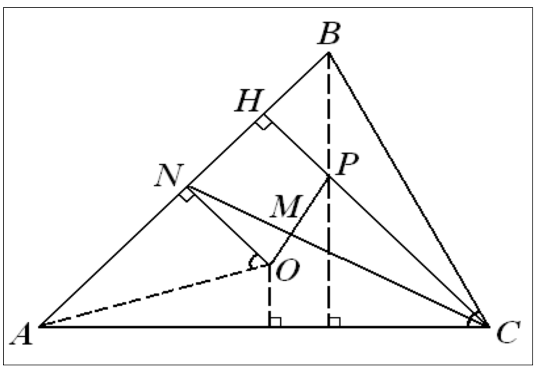
$$=\frac{2\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\left(90^0+\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=1$$

Таким образом, получили очередную формулу Эйлера: $\boxed{d^2=R^2+2R\rho}$.

Теорема о прямой Эйлера

В любом треугольнике центр описанной окружности *O*, ортоцентр *P* и точка пересечения медиан *M* лежат на одной прямой, причём точка *M* делит отрезок *OP* так, что $\dfrac{PM}{MO}=\dfrac{2}{1}$.



Прежде, чем перейти к доказательству, следует напомнить известное в планиметрии тригонометрическое тождество для треугольника $tgA \cdot tgB \cdot tgC = tgA + tgB + tgC$, которое легко доказывается, если в правую часть подставить следующее равенство $tgC = -tg(A+B) = \dfrac{tgA + tgB}{tgA \cdot tgB - 1}$.

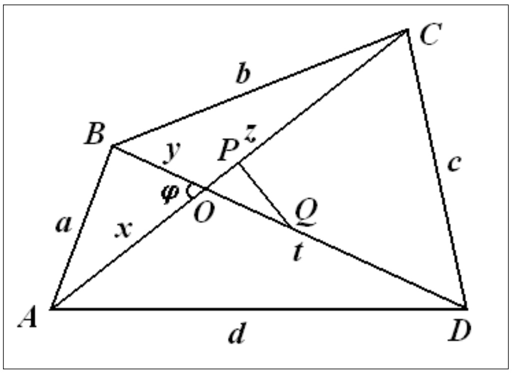
Итак, в треугольнике *ABC*, *CH* – высота, *NO* – серединный перпендикуляр, точка *O* – центр описанной окружности, точка *P* – ортоцентр. Пусть точка *M* есть пересечение медианы *NC* и отрезка *PO*. Из подобия треугольников *NOM* и *PMC* следует пропорция $\dfrac{PC}{ON} = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{MC}{NM}$. Теорема будет доказана, если будет доказано, что $\dfrac{PC}{ON} = \dfrac{2}{1}$. Итак, $\dfrac{PC}{CH - PC} = \dfrac{tgA + tgB}{tgC}$, откуда следует $PC = CH \cdot \dfrac{tgA + tgB}{tgA + tgB + tgC} = CH \cdot \dfrac{tgA + tgB}{tgA \cdot tgB \cdot tgC}$.

Учитывая, что $\angle ACB = \angle AON$, имеем $ON = \dfrac{AB}{2tgC}$, где $AB = AH + HB = CH \cdot (ctgA + ctgB)$.

Таким образом, $ON = \dfrac{CH}{2} \cdot \dfrac{tgA + tgB}{tgA \cdot tgB \cdot tgC}$, что и означает выполнение равенства $\dfrac{PC}{ON} = \dfrac{2}{1}$.

Теорема доказана.

Теорема Эйлера для четырёхугольника



Пусть x, y, z, t – отрезки диагоналей четырёхугольника со сторонами a, b, c, d; угол между диагоналями φ, *P* – середина *AC*, а *Q* – середина *BD*, тогда $OP = \dfrac{x+z}{2} - z = \dfrac{x-z}{2}$ и $OQ = \dfrac{t-y}{2}$. Теорема косинусов для ΔOPQ имеет вид:

$$PQ^2 = \left(\frac{t-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-z}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-y}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right)\cos\varphi, \text{ или}$$

$$4PQ^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2ty - 2xz - 2(tx + yz - yx - zt)\cos\varphi.$$

Введем в рассмотрение треугольники *AOB, AOD, BOC, COD*. Для них выполняются равенства: $\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi \\ b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\varphi \\ c^2 = z^2 + t^2 + 2zt\cos\varphi \\ d^2 = x^2 + t^2 - 2xt\cos\varphi \end{cases}$, из которых следует, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 - 2(yz + xt - zt - xy)\cos\varphi.$$

Таким образом, $4PQ^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 - 2ty - 2xz =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (x+z)^2 - (y+t)^2$, или $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4PQ^2}$,

что и составляет содержание ***теоремы Эйлера***.

В случае трапеции в наших обозначениях имеем $PQ = (d-b)/2$ и $BC \parallel AD$, тогда

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + (d-b)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 + c^2 + 2db = d_1^2 + d_2^2}$$

В случае же параллелограмма $PQ = 0$, $a = c$ и $b = d$, тогда $\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)}$.

Кстати, последней формулой можно воспользоваться для более простого доказательства теоремы Эйлера. А именно, если считать треугольник ABD как половину соответствующего параллелограмма, то $a^2 + d^2 = 2\left(QB^2 + AQ^2\right)$. Аналогично, считая треугольник BCD половиной параллелограмма, имеем $b^2 + c^2 = 2\left(QC^2 + BQ^2\right)$. Таким образом, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4BQ^2 + 2(AQ^2 + CQ^2)$.

Теперь считаем треугольник ACQ половиной параллелограмма. В этом случае:

$AQ^2 + CQ^2 = 2(PQ^2 + AP^2)$. Учитывая, что $4BQ^2 = d_2^2$, $4AP^2 = d_1^2$, получаем формулу Эйлера.

Из той же системы равенств получаем следующую цепочку:

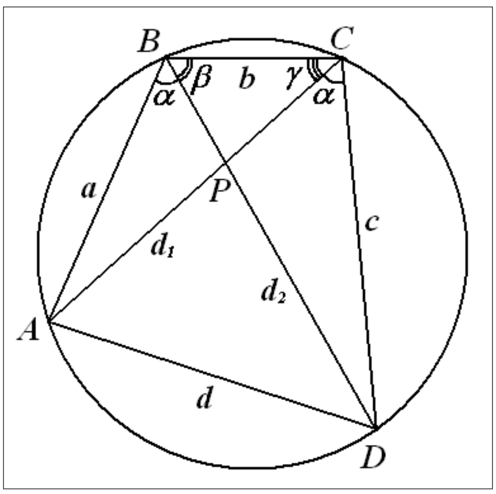
$$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = (xy + zt + yz + xt)2\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2(x+z)(y+t)\cos\varphi,$$

откуда окончательно имеем выражение $\boxed{a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2\, d_1 d_2 \cos\varphi}$.

Таким образом, диагонали четырёхугольника принадлежат перпендикулярным прямым тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

3. Теорема Птолемея

Клавдий Птолемей (ок.100-ок.178)– древнегреческий астроном, математик, географ. Он ввёл понятия широты и долготы местности. Автор «Великого математического построения астрономии в 13 книгах» («Альмагест»), в котором, в частности, изложены сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии



и дана теорема о выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность. Благодаря теореме он составил таблицу хорд, которой воспользовался для астрономических вычислений.

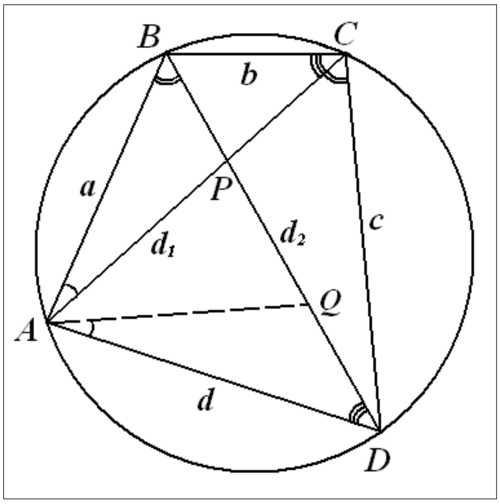
Сумма произведений двух пар противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей $\boxed{d_1 d_2 = ac + bd}$

Запишем теоремы синусов для треугольников ABD, ABC, BCD:

$d = 2R\sin\alpha$, $a = 2R\sin\gamma$, $d_1 = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $b = 2R\sin(180^0 - \alpha - \beta - \gamma)$, $c = 2R\sin\beta$, $d_2 = 2R\sin(\alpha+\gamma)$.

Теорема будет доказана, если будет показано равенство тригонометрических выражений, получившихся при подстановке в формулу после сокращения на $4R^2$:

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)$ и $\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\alpha + \sin\gamma\cdot\sin\beta$. После тригонометрических преобразований левой и правой части $\cos(\beta-\gamma) - \cos(2\alpha+\beta+\gamma)$ и $\cos(\beta+\gamma) - \cos(2\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\gamma-\beta) - \cos(\beta+\gamma)$ получаем тождественное равенство.

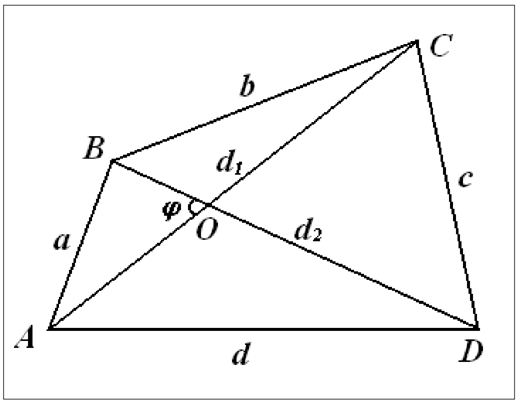


Другое доказательство прямой теоремы, взятое из учебного пособия [1], связано с небольшим дополнительным построением. Проведём отрезок AQ так, чтобы углы QAD и BAC были равны. Из подобия треугольников QAD и BAC следует равенство $\frac{b}{QD} = \frac{d_1}{d}$ или $d_1 \cdot QD = bd$. Из подобия треугольников QAB и ACD следует равенство $\frac{c}{QB} = \frac{d_1}{a}$ или $d_1 \cdot QB = ac$.

Сложив равенства $d_1 \cdot QD + d_1 \cdot QB = bd + ac$, получаем $d_1 d_2 = ac + bd$.

Общая формула площади четырёхугольника и теорема Птолемея

Рассмотрим теперь в общем виде взаимосвязь параметров четырехугольника. Все



обозначения даны на рисунке: d_1, d_2 – диагонали четырёхугольника со сторонами *a, b, c, d* и углом между диагоналями φ, По теореме косинусов выразим $\grave{A}\tilde{N}^2$ из треугольников *ABC* и *ACD* и приравняем:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$$

или $a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab\cos B-cd\cos D)\Rightarrow$

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2=a^2b^2\cos^2 B-2abcd\cos B\cos D+c^2d^2\cos^2 D \qquad (1)$$

Для площади четырехугольника *ABCD* имеем очевидное соотношение:

$S=\frac{1}{2}(ab\sin B+cd\sin D)$, откуда $4S^2=a^2b^2\sin^2 B+2abcd\sin B\sin D+c^2d^2\sin^2 D.$ (2)

Сложив (1) и (2), получим $\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2+4S^2=a^2b^2-2abcd\cos(B+D)+c^2d^2.$ (3)

Преобразуем выражение (3) для площади S:

$$16S^2=\left(a^2b^2+c^2d^2\right)\cdot 4-8abcd\cos(B+D)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=$$

$$=4\left(a^2b^2+c^2d^2\right)-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}+8abcd-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=$$

$$=4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=$$

$$=\left(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right)\left(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right)-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=$$

$$=\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=$$

$$=(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=$$

$$=(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

Отсюда следует формула площади: $\boxed{S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}}$

Если четырехугольник можно вписать в окружность, то ∠*B* + ∠*D* = 180°, тогда получаем известную формулу Брахмагупты: $\boxed{S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

Брахмагупта (ок. 598 – 660) – индийский математик и астроном.

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то $a+c=b+d$, $p=a+c=b+d$ и $\boxed{S=\sqrt{abcd}\,\sin\frac{B+D}{2}}$. Наконец, если четырехугольник можно вписать в окружность и в него, в свою очередь, можно вписать окружность, то $\boxed{S=\sqrt{abcd}}$.

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой, полученной в параграфе

«Теоремы Эйлера»: $\boxed{a^2+c^2-b^2-d^2=2\,d_1d_2\cos\varphi}$

С учетом этого и того, что $2S=d_1d_2\sin\varphi$, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 4S^2=d_1^2d_2^2\sin^2\varphi \\ \left(\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2=d_1^2d_2^2\cos^2\varphi \end{cases}$$

Складывая данные равенства, получаем:

$$\boxed{S^2=\frac{d_1^2d_2^2}{4}-\left(\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{4}\right)^2} \qquad (4)$$

Второе выражение для площади получим, разделив равенства системы друг на друга почленно:

$$\boxed{S=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{4}\operatorname{tg}\varphi}$$

Выпишем выражения (3) и (4) в систему:

$$\begin{cases} 4S^2=d_1^2d_2^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2 \\ 4S^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(B+D)-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Отсюда

$$d_1^2d_2^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(B+D)-\left[\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2\right].$$

Поскольку $\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-\left(a^2+c^2-b^2-d^2\right)^2=4\left(a^2b^2-b^2d^2-a^2c^2+c^2d^2\right)$

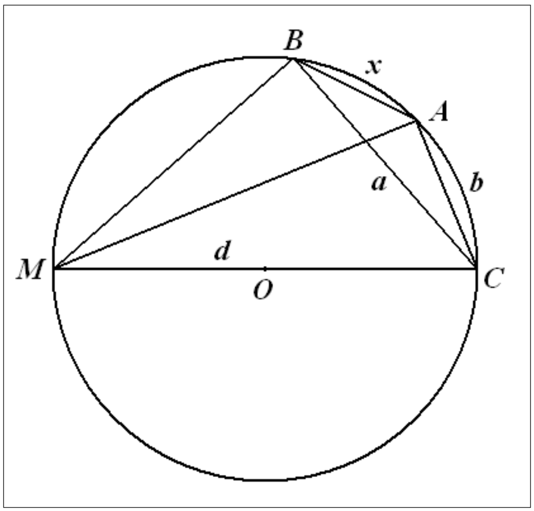
то $\boxed{d_1^2d_2^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(B+D)}$

Таким образом, при $\angle B+\angle D=180°$ получаем

$$d_1^2d_2^2=a^2c^2+b^2d^2+2abcd \quad\Rightarrow\quad \boxed{d_1d_2=ac+bd}$$

С другой стороны, если $d_1d_2=ac+bd$, то из этого выражения следует, что $\cos(B+D)=-1$, откуда $\angle B+\angle D=180°$.

Это и есть ***обобщённая теорема Птолемея*** для четырехугольника, вписанного в окружность.



Покажем, как Птолемей составил таблицу хорд. Допустим, дан диаметр окружности d и хорды двух дуг: a и b.

Найдём хорду разности этих дуг.

Запишем теорему с учётом того, что треугольники MAC и MBC прямоугольные:

$xd + b\sqrt{d^2 - a^2} = a\sqrt{d^2 - b^2}$, откуда получаем формулу для хорды $x = \dfrac{a\sqrt{d^2 - b^2} - b\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$.

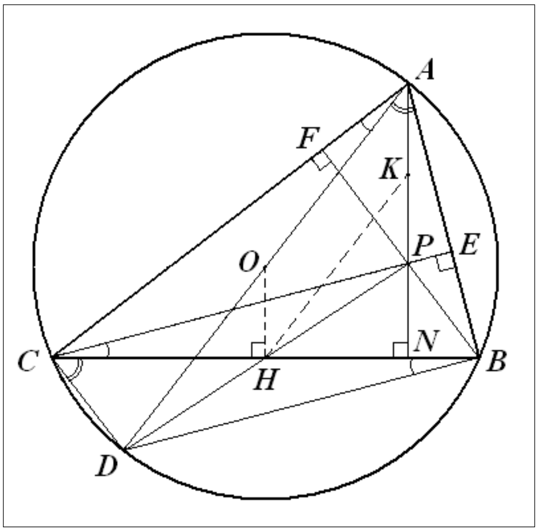
Следует заметить, что $\sin \angle BCA = \dfrac{x}{d}$. Разделив дугу пополам, можно найти хорду половины дуги. Птолемей установил длину хорды дуги $0{,}5^0$ и, пользуясь этим, вычислил хорды всех дуг с шагом в $0{,}5^0$. Это были первые тригонометрические таблицы в истории математики.

Задачи на теорему Птолемея

1. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M, отличная от A, B и C. Доказать, что один из отрезков AM, AB, AC равен сумме двух других.
2. В шестиугольнике ABCDEF, вписанном в окружность, AC = CE = EA, $BE + DA + FC = p$. Найти периметр шестиугольника.
3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC < 2 \cdot AD$.
4. На дуге CD описанной около квадрата ABCD окружности взята точка P. Докажите, что: $PA + PC = \sqrt{2} \cdot PB$; $PA - PC = \sqrt{2} \cdot PD$; $PC + PD = \dfrac{PA + PB}{\sqrt{2} + 1}$.
5. Дан параллелограмм ABCD. Окружность, проходящая через точку A, пересекает отрезки AB, AC, AD в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.
6. Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.
7. На гипотенузе треугольника ABC с катетами a и b построен квадрат. Найти расстояние от вершины треугольника C до точки пересечения диагоналей квадрата.
8. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найти площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

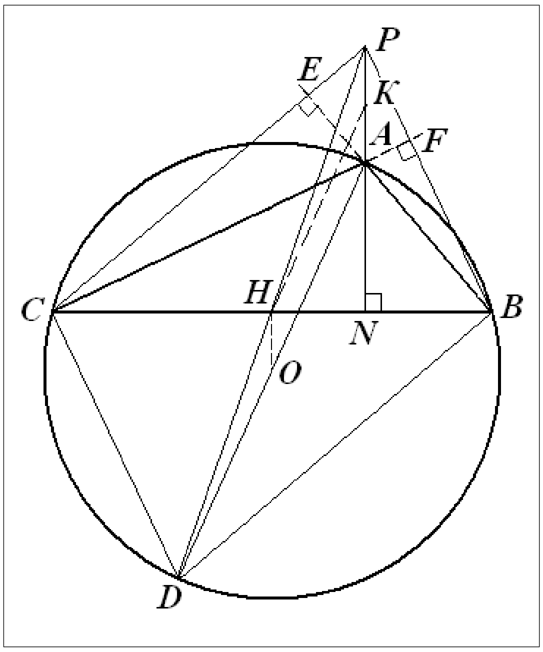
4. Свойства ортоцентра треугольника

Теорема. Две вершины треугольника, ортоцентр и точка, описанной около треугольника окружности, диаметрально противоположная третьей вершине треугольника, образуют параллелограмм.



В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, точка P – ортоцентр, D – диаметрально противоположная вершине A точка окружности, PBDC – четырёхугольник с диагоналями BC и PD.

Пусть угол A равен α. Углы ABD и ACD равны 90^0 как опирающиеся на диаметр. В треугольнике ACE $\angle ACE = 90^0 - \alpha$. Таким образом, $\angle PCD = \alpha$. Четырёхугольник AEPF можно вписать в окружность, следовательно $\angle EPF = 180^0 - \angle CAE = \angle CPB$. В результате сумма двух углов PCD и CPB равна 180^0, откуда следует, что CD//PB. Так как отрезки CE и DB параллельны как перпендикуляры к стороне AB, то четырёхугольник PBDC – параллелограмм и точка H – точка пересечения его диагоналей. В случае тупоугольного треугольника результат тот же самый. Действительно, CP//DB как два перпендикуляра к одной прямой AB, $\angle PCC = 90^0 + \angle PCF = 90^0 + (90^0 - \angle BPC)$.



Таким образом, сумма двух углов PCD и CPB равна 180^0, откуда следует, что CD//PB и четырёхугольник PBDC – параллелограмм.

Из этого факта следует много интересных выводов:

1. OH – серединный перпендикуляр к стороне BC;
2. Так как OH//AN, то в треугольнике APD OH является средней линией и, следовательно, $AP = 2OH$;
3. Если провести HK//OA, то HK будет средней линией в треугольнике APD, а следовательно, равно радиусу описанной окружности;
4. Так как $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AP}$, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ и, следовательно, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$.
5. Углы CBA и CDA равны как опирающиеся на одну дугу, следовательно, в

остроугольном треугольнике $\angle PAB = \angle OAC$, так как принадлежат прямоугольным треугольникам CAD и ANB.

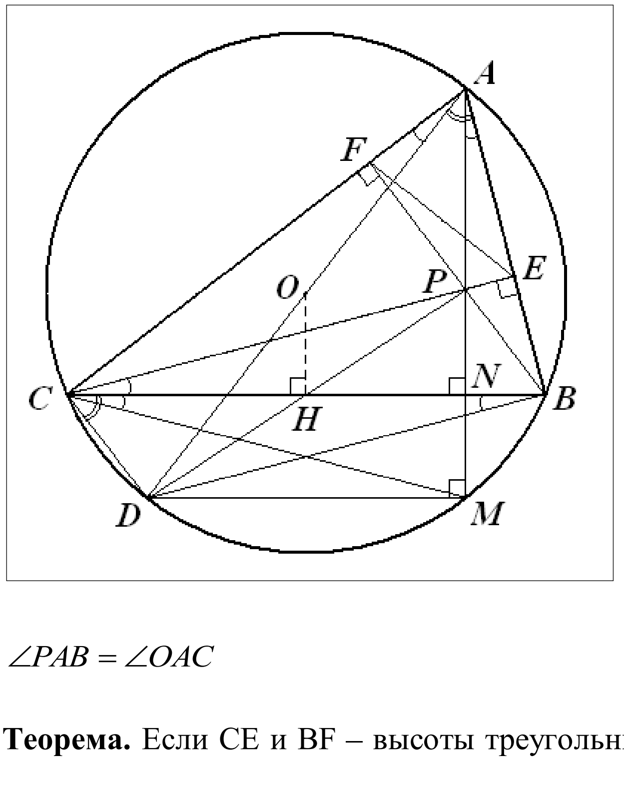
Кроме этого, из теоремы синусов для треугольника CPB следует равенство $\frac{CB}{\sin(180^0-\alpha)} = \frac{CB}{\sin\alpha} = 2R$, следовательно, радиусы описанных окружностей треугольников ABC, CPB, APB, APC равны.

Таким образом, можно сформулировать некоторые следствия из теоремы.

Следствия:

1. В любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.
2. Если P – ортоцентр треугольника ABC, то расстояние между серединами отрезков BC и AP равно радиусу описанной окружности треугольника ABC.
3. Расстояние от ортоцентра до вершины треугольника вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.
4. Если P – ортоцентр треугольника ABC, а O – центр описанной окружности, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$
5. Если P – ортоцентр треугольника ABC, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, APB, APC, BPC, равны между собой.

Если продлить высоту AN до пересечения с окружностью, то легко доказывается, что точка, которая лежит на описанной окружности треугольника симметрична ортоцентру относительно прямой, содержащей сторону треугольника.

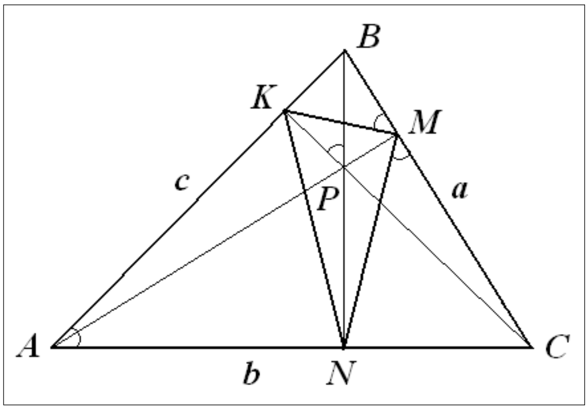


Действительно (см. рис.), угол AMD равен 90^0, т.е. хорды BC и MD параллельны. Из равенства дуг CD и MB следует равенство углов CBD и MCB, а так как углы PCB и CBD равны, то углы PCN и MCN также равны. Треугольники PCN и MCN равны по общему катету и острому углу, следовательно PN равно MN. Из равенства дуг CD и MB следует также равенство $\angle PAB = \angle OAC$

Теорема. Если CE и BF – высоты треугольника ABC, а O – центр описанной окружности треугольника, то $OA \perp EF$.

Четырёхугольник AEPF можно вписать в окружность, следовательно, углы FEA и FPA равны. Но $\angle FPA = 90^0 - \angle FAP = \angle ACB$ и, кроме того, $\angle OAE = \angle DCB = 90^0 - \angle ACB$. Таким образом, $\angle OAE + \angle ACB = \angle OAE + \angle FEA = 90^0$ и $OA \perp EF$.

Задача 1. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b и c определить периметр треугольника, образованного основаниями его высот (см. рис.).



Решение. В треугольнике ABC точки K, M, N – основания высот, точка P – ортоцентр. Четырёхугольник BMPK можно вписать в окружность, следовательно, углы BMK и BPK равны. Так как $\angle BPK = 90^0 - \angle KBP = \angle BAC$, то $\Delta BMK \sim \Delta ABC$ по двум углам. Аналогично $\Delta AKN \sim \Delta ABC$ и $\Delta MNC \sim \Delta ABC$. Из подобия треугольников *KBM*, *MNC*, *AKN* и *ABC* следует, что высоты ΔABC являются биссектрисами ортоцентрического треугольника *KMN*, причем его углы связаны простыми равенствами с углами ΔABC. Действительно, $\angle BMK = \angle A = \angle NMC$, следовательно, $\angle KMN = 180° - 2\angle A$ и $\angle AMN = \angle KMA = 90° - \angle A$. Аналогично $\angle NKM = 180° - 2\angle C$ и

$\angle KNM = 180° - 2\angle B$.

Из этого подобия следует равенство: $\dfrac{KN}{a} = \dfrac{AK}{b} = \dfrac{AN}{c} = \cos A$.

Поскольку $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, то $KN = \left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot a$.

Аналогично $MN = \left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \cdot c$ и $KM = \left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \cdot b$.

Таким образом, $KN + MN + KM = \dfrac{2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) - a^4 - b^4 - c^4}{2abc}$.

Из формулы Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр ΔABC следует, что

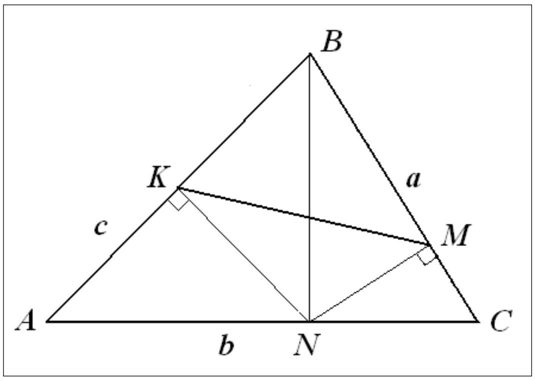
$$16S^2 = (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) =$$

$$= \left(c^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - c^2\right) = \left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right) =$$
$$= 4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 = 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) - a^4 - b^4 - c^4.$$

Окончательно получаем $\boxed{KN + KM + MN = \dfrac{8S^2}{abc} = \dfrac{abc}{2R^2} = 2p \cdot \dfrac{r}{R}}$,

где r – радиус вписанной в ΔABC окружности. Таким образом, периметр ΔKMN равен периметру ΔABC, умноженному на отношение радиусов вписанной в ΔABC и описанной вокруг него окружностей.

Задача 2. В треугольнике ABC a, b и c – длины сторон, точки K и M – основания перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных из основания высоты BN (см. рис.). Найти длину отрезка KM.



Решение.

Так как $BN = a \cdot \sin C$, $BM = BN \cdot \cos(90^0 - C)$,

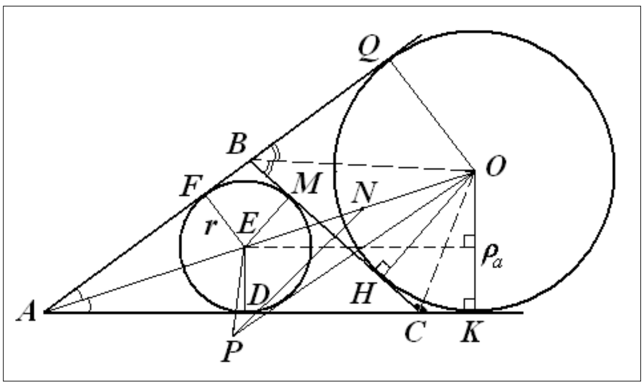
то $BM = a \cdot \sin^2 C$.

Четырёхугольник BMNK можно вписать в окружность, следовательно, углы BMK и BNK равны. Так как $\angle BNK = 90^0 - \angle KBN = \angle BAC$, то $\Delta BMK \sim \Delta ABC$ по двум углам. Отсюда $\dfrac{KM}{b} = \dfrac{BM}{c} = \dfrac{a \cdot \sin^2 C}{c} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{c^2}{4R^2} = \dfrac{ac}{4R^2} \Rightarrow$

$\boxed{KM = \dfrac{abc}{4R^2} = \dfrac{4S^2}{abc} = p \cdot \dfrac{r}{R}}$.

Отрезок KM называют антипараллелью AC. Очевидно, что KM параллельна отрезку, соединяющему основания высот на стороны BC и AB из предыдущей задачи и так же являющемуся антипараллелью AC.

5. Определение радиуса вневписанной окружности в треугольнике



Пусть в треугольнике ABC точка O – центр вневписанной окружности, точка P – центр описанной окружности, E – центр вписанной окружности, угол BAC равен α, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности, ρ – радиус вневписанной окружности, M, F, D, H, K, Q – точки касания окружностей со сторонами треугольника или угла.

Запишем следующую систему равенств: $\begin{cases} \rho = (c + BQ)\cdot tg\dfrac{\alpha}{2} \\ \rho = (b + CK)\cdot tg\dfrac{\alpha}{2} \\ BQ + CK = BH + CH = a \end{cases}$. Из системы следует формула $\rho = p\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$. Запишем теорему косинусов для стороны a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cdot(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1) = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= (b+c)^2 - \frac{8S\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = (b+c)^2 - \frac{4S}{tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, $S = \dfrac{(b+c-a)(a+b+c)}{4}tg\dfrac{\alpha}{2} = p(p-a)\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$ и $\boxed{\rho_a = \dfrac{S}{p-a}}$.

Можно получить формулу для r следующим образом: $AF + BM + MC = p$, $AF = p - a$, $r = AF\cdot tg\dfrac{\alpha}{2} = (p-a)\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$, следовательно $S = p(p-a)\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$

Воспользовавшись формулой для $\boldsymbol{\rho}$ несложно получить следующие равенства:

$S = \sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c}$ и $\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c} = \dfrac{1}{r}$.

Теорема Мансиона

Отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам. Пауль Мансион – бельгийский математик, 1844-1919 г.

Пусть N – середина отрезка EO. Докажем, что в этом случае отрезок PN есть радиус описанной окружности. Итак,

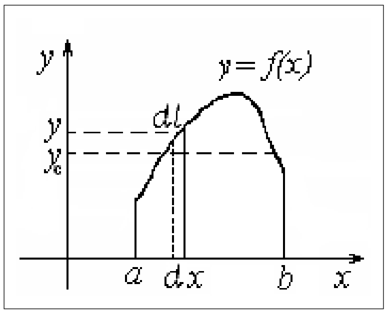
$$PN^2 = \frac{PE^2 + PO^2}{2} - \frac{EO^2}{4} = \frac{R^2 - 2Rr + R^2 + 2R\rho}{2} - \frac{(\rho - r)^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = R^2 + R(\rho - r) - \frac{(\rho - r)^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$PN^2 = R^2 + (\rho - r)\left(R - \frac{(\rho - r)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) = R^2 + (\rho - r)\left(R - \frac{\grave{a}\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) = R^2 + (\rho - r)\left(R - \frac{a}{2\sin\alpha}\right) = R^2$$

6. Теоремы Паппа-Гюльдена

В процессе написания новых стандартов по математике за последние 40 лет произошла потеря очень интересных и несложных теорем, которые были раньше в программе. Одна из потерь – теоремы Паппа (александрийский математик 3в н.э.) – Гюльдена (швейцарский математик 17в.). Теоремы не только легко выводятся, но и легко запоминаются.

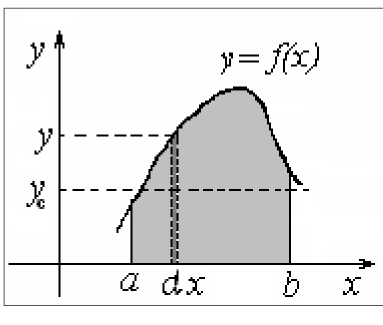
Теорема 1. Площадь поверхности вращения плоской кривой вокруг не пересекающей её оси равна произведению длины этой кривой на путь, проходимый её центром тяжести.



На рисунке показана кривая, вращающаяся вокруг оси Ох. Разбиваем кривую на отрезки длиной dl с координатой y. У каждого отрезка центр тяжести совпадает с координатой. Масса i-того отрезка m_i равна длине отрезка, т.е. $\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, а масса всей кривой М равна длине кривой на данном отрезке. Таким образом, ордината центра тяжести кривой при замене суммирования интегрированием равна: $y_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i y_i}{M} = \dfrac{\int_a^b y\,dl}{L} = \dfrac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L}$. С другой стороны, поверхность тела вращения равна $S_{\text{âð}} = \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. В результате получаем формулу, соответствующую первой теореме Паппа-Гюльдена: $\boxed{S_{вр} = 2\pi \cdot y_c \cdot L}$.

Теорема 2. Объём тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей её оси равен произведению площади этой фигуры на путь, проходимый её центром тяжести.

Если первая теорема мало применима, поскольку вычисление длины какой-либо дуги или площади поверхности вращения сводятся в большинстве случаев к достаточно сложным интегралам, то вторая теорема предоставляет большие возможности для использования.



Итак, на рисунке показана криволинейная трапеция, вращающаяся вокруг оси Ох. Разбиваем пластинку на полоски толщиной dx

и длиной y. У каждой полоски центр тяжести лежит на середине. Масса i-той полоски m_i равна площади этой полоски, т.е. $y_i dx$, а масса всей пластинки М равна площади криволинейной трапеции. Таким образом, ордината центра тяжести криволинейной трапеции при замене суммирования интегрированием равна: $y_c = \frac{\sum_i m_i \frac{y_i}{2}}{M} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b y dx}$. С другой стороны, объём тела вращения равен $V = \pi\int_a^b y^2 dx$. В результате получаем формулу, соответствующую второй теореме Паппа-Гюльдена: $\boxed{V = 2\pi \cdot y_c \cdot S}$.

Пусть дана функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$. Тогда $S = \int_0^\pi \sin x dx = 2$, объём тела вращения вокруг оси Ох $V_x = \pi\int_0^\pi y^2 dx = \frac{\pi^2}{2}$. Ордината центра тяжести пластинки $y_c = \frac{\pi}{8}$.

Пусть теперь вращение происходит вокруг оси Оу и вращается пластинка с границами, соответствующими множеству точек $|y| = \sin x$ в том же отрезке $[0;\pi]$. В этом случае

$S = 4$, абсцисса центра тяжести $x_c = \frac{\pi}{2}$ и объём тела вращения (подобного тору) $V_y = 4\pi^2$.

Задачи на теорему Паппа-Гюльдена

1. Прямоугольник со сторонами a и b вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельно диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объём.
2. Правильный шестиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объём.
3. Правильный восьмиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объём.
4. Найдите объём и площадь поверхности тора с радиусом сечения, равным r и расстоянием до центральной оси, равным a.

7. Дополнительные формулы объёма многогранников

1. **Формула Ньютона – Симпсона**

Тело, имеющее объём, расположено между плоскостями $z = 0$ и $z = h$. Известно, что площадь сечения тела плоскостью $z = const$ есть функция вида $S(z) = az^2 + bz + c$, $0 \le z \le h$. Доказать формулу $\boxed{V = \frac{h}{6} \cdot \left(S(0) + 4S\left(\frac{h}{2}\right) + S(h) \right)}$.

Найдём объём тела из общей формулы $V = \int_0^h S(z)dz = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = \frac{h}{6}\left(2ah^2 + 3bh + 6c\right)$.

С другой стороны, запишем систему равенств: $\begin{cases} S(0) = c \\ S(h) = ah^2 + bh + c \\ 4S\left(\frac{h}{2}\right) = ah^2 + 2bh + 4c \end{cases}$. В результате сложения получаем выражение в скобках в формуле объёма, приведённой выше. Так как для пирамиды, усечённой пирамиды, конуса, усечённого конуса, шара, призмы необходимое условие квадратичной зависимости площади сечения от аппликаты выполняется, поэтому формула достаточно универсальна.

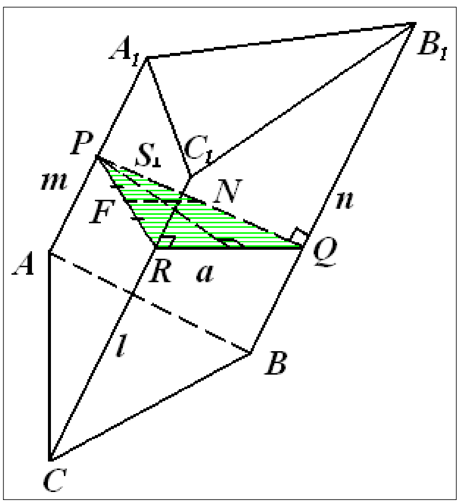
Примеры:

1. Найдите объём трёхосного эллипсоида, заданного своей канонической формулой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Для вычисления объёма учтём, что $S(-c) = S(c) = 0$, так как сечение вырождается в точку, и $S(0) = \pi ab$, так как в сечении получается обыкновенный эллипс.

Таким образом, имеем $V = \frac{2c}{6} \cdot \left(S(-c) + 4S(0) + S(c)\right) = \frac{4}{3}\pi abc$.

2. Доказать, что объём треугольной усечённой призмы $ABCA_1B_1C_1$, равен произведению площади перпендикулярного сечения $S_\perp$ на среднее арифметическое длин трёх боковых рёбер.



Решение. Имеем площадь сечения $S(0) = S_{CC_1B_1B} = \frac{n+l}{2} \cdot a$; $S(h) = 0$, где $a = PQ$, $h = \frac{2S_\perp}{a}$ (см. рис.). Если через середины PR и PQ провести отрезки параллельные рёбрам, то площадь

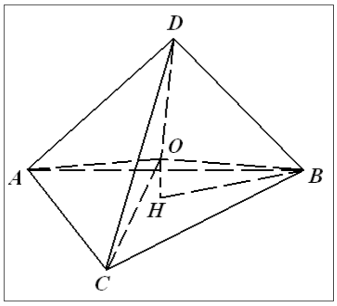
$S\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{\frac{m+n}{2}+\frac{m+l}{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}$. После подстановки в формулу Симпсона окончательно получаем объём усечённой призмы $V=S_{\perp}\cdot\frac{m+n+l}{3}$.

Пример. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью так, что боковое ребро AA_1 делится в отношении $AM : A_1M = 1 : 2$, ребро CC_1 в отношении $CP : C_1P = 2 : 3$. Найдите отношение объёмов многогранников $A_1B_1C_1PM$ и $ABCPMB_1$.

2. Объём многогранника, в который вписан шар

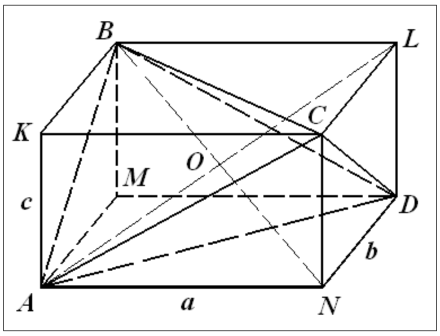
Пусть в тетраэдре ABCD точка O – центр вписанной сферы. Тогда объём каждой пирамиды OABC, OBCD, OCDA, OBDA равен $\frac{1}{3}r\cdot S_i$, где r – высота каждой пирамиды, а S_i – площади граней исходного тетраэдра. Таким образом, объём тетраэдра ABCD вычисляется по формуле $\boxed{V=\frac{1}{3}r\cdot S_{полн.}}$. Очевидно, что формула применима к любому многограннику, в который можно вписать шар.

Пример:



Найдите объём тетраэдра, радиусы вписанной и описанной сфер, если противоположные рёбра тетраэдра попарно равны 5, 6, 7.

На первом рисунке точка H – центр описанной окружности треугольника ABC, OH – перпендикуляр к плоскости ABC, O – центр описанной сферы. Попарное равенство рёбер означает, что тетраэдр вписан в прямоугольный параллелепипед, что видно на втором рисунке. Определим измерения параллелепипеда из системы уравнений $\begin{cases}a^2+b^2=49\\a^2+c^2=36\\c^2+b^2=25\end{cases}$. Решением является тройка чисел $a=\sqrt{30}$, $b=\sqrt{19}$, $c=\sqrt{6}$. Так как объёмы

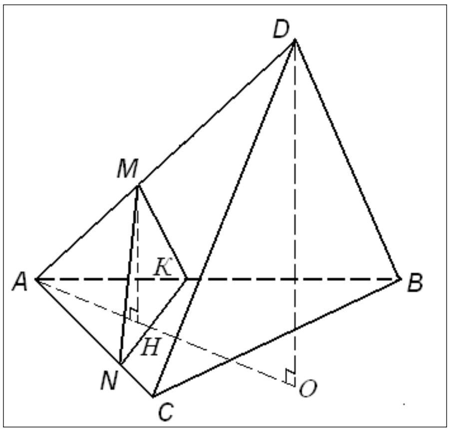


тетраэдров KABC, LBCD, NACD, MABD равны $\frac{abc}{6}$, то объём исходного тетраэдра равен $V=abc-4\cdot\frac{abc}{6}=\frac{abc}{3}$ или $V=2\cdot\sqrt{95}$. Площадь полной поверхности тетраэдра равна $S_{\Sigma}=4\cdot S_{\Delta}$, где площадь грани вычисляем по формуле Герона. Таким образом, площадь полной поверхности равна $24\sqrt{6}$. Отсюда радиус вписанной сферы $r = \frac{\sqrt{570}}{24}$.

Радиус описанной сферы равен половине диагонали параллелепипеда, т.е. $R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\sqrt{55}}{2}$. Если подсчитать радиус описанной окружности грани тетраэдра по формуле $R_\Delta = \frac{abc}{4S_\Delta} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, то выполняется равенство $R^2 = R_\Delta^2 + r^2$. Таким образом, центры вписанной и описанной сфер совпадают.

3. Объёмы тетраэдров, имеющих равный трёхгранный угол

Исходя из рисунка, подобия треугольников и теоремы о соотношении площадей треугольников, имеющих равный угол, определим отношение объёмов тетраэдров, имеющих равный трёхгранный угол



$$\frac{V_{AMNK}}{V_{ABCD}} = \frac{MH \cdot S_{ANK}}{DO \cdot S_{ABC}} = \frac{MH \cdot AK \cdot AN}{DO \cdot AB \cdot AC} = \frac{AM \cdot AK \cdot AN}{AD \cdot AB \cdot AC}$$

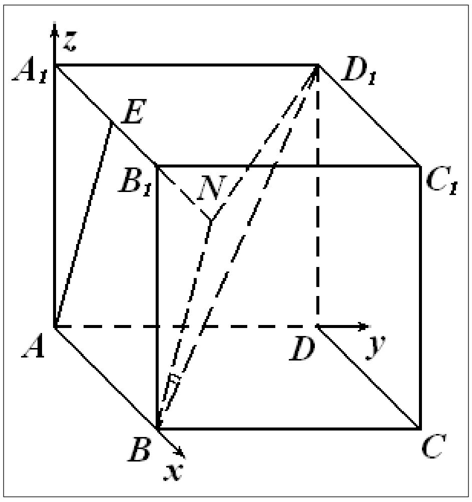
Таким образом, отношение объёмов равно отношению произведений трёх рёбер, исходящих из вершины общего трёхгранного угла каждого тетраэдра.

Пример: В треугольной пирамиде ABCD на ребре AD взята точка M, а на ребре AB взята точка K так, что AM : MD = 7 : 3, AK : KB = 1 : 4. Сколько процентов от объёма пирамиды ABCD составляет объём пирамиды AMKC?

Подставим отношение отрезков в полученную выше формулу и получаем следующий результат $\frac{V_{AMKC}}{V_{ABCD}} \cdot 100\% = \frac{AM \cdot AK}{AD \cdot AB} \cdot 100\% = \frac{7 \cdot 1}{10 \cdot 5} \cdot 100\% = 14\%$.

8. Методы решения заданий С2

Большинство задач С2 в настоящее время затрагивают тему двугранного угла или угла между прямыми, прямыми и плоскостями. Рассмотрим характерные задачи на тему углов в многогранниках.



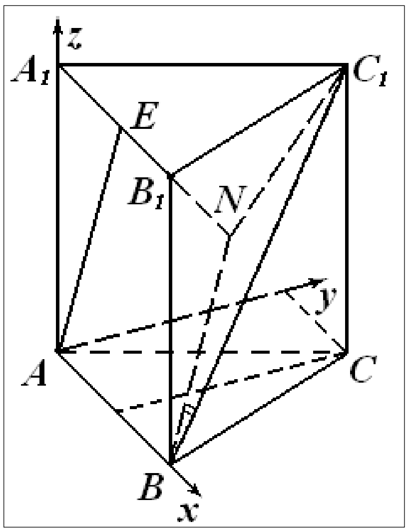
Задача 1. В кубе $A...D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1.

Решение. Строим $BN \parallel AE$ и получаем параллелограмм $AENB$. Сторону куба примем равной 2. Рассматривая треугольники AEA_1 и A_1ND_1 находим стороны и диагональ: $NB = \sqrt{5}$, $ND_1 = \sqrt{13}$, $BD_1 = 2\sqrt{3}$. В полученном треугольнике NBD_1 определяем косинус угла NBD_1: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Второй способ решения связан с введением системы координат. В этом случае имеем следующие координаты точек: A(0, 0, 0); E(1, 0, 2); B(2, 0, 0); D_1(0, 2, 2) и координаты векторов $\overrightarrow{AE}\{1, 0, 2\}$ и $\overrightarrow{BD_1}\{-2, 2, 2\}$. Таким образом, используя скалярное произведение векторов, получаем тот же результат.

Задача 2. В правильной треугольной призме $A...C_1$, все рёбра которой равны, точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BC_1.

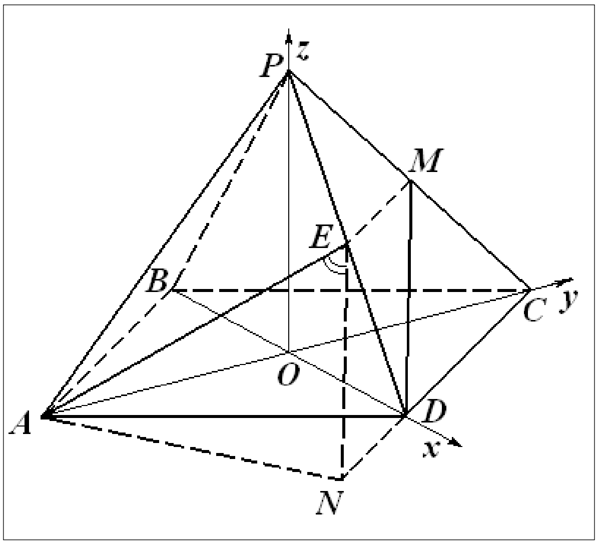
Решение. Строим $BN \parallel AE$ и получаем параллелограмм $AENB$. Сторону призмы примем равной 2. Рассматривая треугольники AEA_1 и A_1NC_1 находим стороны и диагональ:



$NB = \sqrt{5}$, $NC_1 = \sqrt{7}$, $BC_1 = 2\sqrt{2}$. В полученном треугольнике NBC_1 определяем косинус угла NBC_1: $\cos\alpha = \frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Второй способ решения связан с введением системы координат. В этом случае имеем следующие координаты точек: A(0, 0, 0); E(1, 0, 2); B(2, 0, 0); C_1(1, $\sqrt{3}$, 2) и координаты векторов $\overrightarrow{AE}\{1, 0, 2\}$ и $\overrightarrow{BC_1}\{-1, \sqrt{3}, 2\}$. Таким образом, используя скалярное произведение векторов, получаем тот же результат.

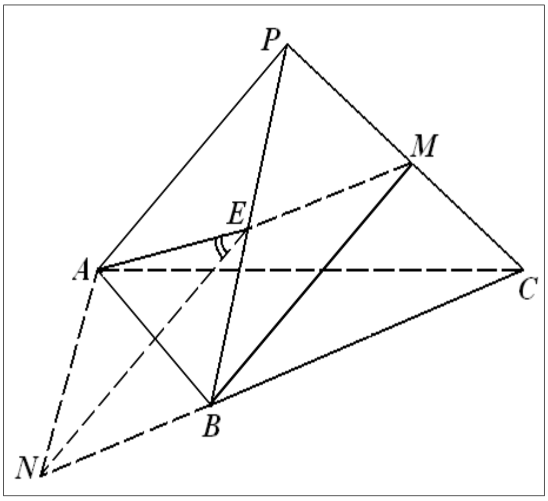
Задача 3. В половине октаэдра PABCD точка E – середина ребра PD, а точка M – середина ребра PC. Найдите косинус угла между прямыми AE и DM.



Решение. Строим $EN \parallel DM$ и получаем параллелограмм $MEND$. Сторону пирамиды примем равной 2. Рассматривая равносторонние треугольники APD и PCD находим $AE = DM = NE = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора находим в треугольнике ADN $AN = \sqrt{5}$. В полученном треугольнике NEA определяем косинус угла NEA: $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

Второй способ решения связан с введением системы координат. В этом случае имеем следующие координаты точек: A(0, $-\sqrt{2}$, 0);

E($\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$); D($\sqrt{2}$, 0, 0); M(0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$) и координаты векторов $\overrightarrow{AE}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ и $\overrightarrow{DM}\left\{-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Таким образом, используя скалярное произведение векторов, получаем тот же результат.

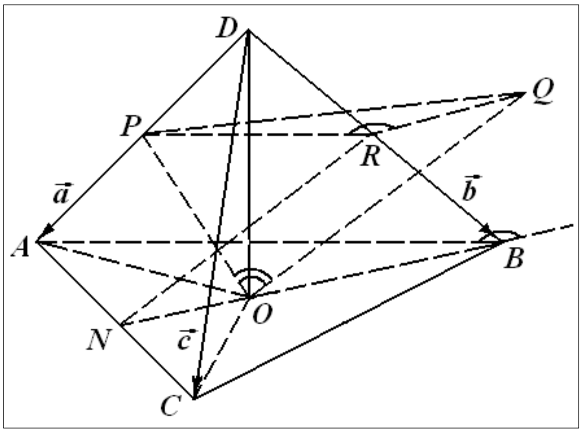


Задача 4. В правильном тетраэдре PABC точка E – середина ребра PB, а точка M – середина ребра PC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BM.

Решение. Строим $EN \parallel BM$ и получаем параллелограмм $MENB$. Сторону пирамиды примем равной 2. Рассматривая равносторонние треугольники APB и PCB находим

$AE = BM = NE = \sqrt{3}$. По теореме косинусов находим в треугольнике ABN $AN = \sqrt{7}$. В полученном треугольнике NEA определяем косинус угла NEA: $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$. Косинус угла между прямыми при этом будет равен $\cos(AE, BM) = |\cos\alpha| = \frac{1}{6}$.

Задача 5. В правильном тетраэдре DABC точка P, N, R – середины рёбер AD, AC, BD соответственно, O – центр грани ABC. Найдите косинус угла между прямыми OP и NR.



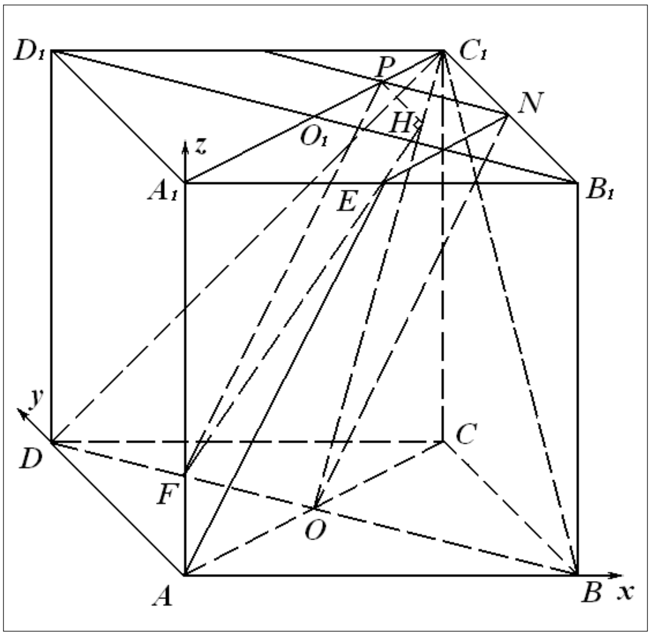
Решение. Строим $OQ \parallel NR$ и $OQ = NR$, получаем параллелограмм $NRQO$. Сторону пирамиды примем равной 2. Рассматривая треугольники AOD, ACB, ABD находим $PO = 1$, $NO = RQ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $PR = 1$. Из прямоугольного треугольника NRB находим $NR = \sqrt{2}$. По теореме косинусов находим в треугольнике PQR $PQ = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$. В полученном треугольнике OPQ определяем косинус угла POQ: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Второй способ решения связан с введением трёх задающих полностью тетраэдр векторов (см. рис.). Модули базисных векторов равны а, а углы между ними 60^0. В этом случае вектор $\overrightarrow{NR} = \dfrac{\vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, а вектор $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$. Модули этих векторов $NR = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $PO = \dfrac{a}{2}$.

Скалярное произведение

$$\overrightarrow{NR}\cdot\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}}{2}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}}{6} = \frac{a^2}{12}.$$

Таким образом, получаем косинус угла между векторами $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.



Задача 5. В кубе $A...D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDC_1.

Решение. Перенесём AE в положение ON и далее в положение PF. Строим PH перпендикулярно OC_1. Так как BD перпендикулярно плоскости ACC_1, то PH перпендикулярно OC_1 и BD, т.е. самой плоскости BDC_1. Синусом угла между прямой AE и плоскостью BDC_1, таким образом, будет синус угла PFH. Сторону куба примем равной 2.

В таком случае $PF = \sqrt{5}$, $PH = PC_1 \cdot \sin(PC_1H) = PC_1 \cdot \sin(C_1OC)$, $PH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Второй способ решения связан с введением системы координат. В этом случае имеем следующие координаты точек: A(0, 0, 0); E(1, 0, 2); O(1, 1, 0); C_1(2, 2, 2); A_1(0, 0, 2); C(2, 2, 0); и координаты векторов $\overrightarrow{AE}\{1, 0, 2\}$ и $\overrightarrow{OC_1}\{1,\ 1,\ 2\}$. $\overrightarrow{A_1C}\{2,\ 2,\ -2\}$. Используя скалярное произведение векторов, получаем, во-первых, что вектор $\overrightarrow{A_1C}\{2,\ 2,\ -2\}$– это вектор плоскости BC_1D, т.к. $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{OC_1} = 0$, а, во-вторых, $\cos(\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{AE}) = \frac{\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AE}}{A_1C \cdot AE} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$. Отсюда $\sin\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{AE})\right| = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Самостоятельная работа №1

Вариант №1	Вариант №2
1. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5 : 4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC = 12см.	**1.** Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13см, BC = 24см. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B, биссектриса угла A делит высоту, проведённую из этой вершины.
2. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 8 см и 15 см, а средняя линия равна 8,5 см.	**2.** Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 20 см и 21 см, а средняя линия равна 14,5 см.
3. Три окружности, радиусы которых равны 2см, 3см и 10см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.	**3.** Три окружности, радиусы которых равны 4см, 8см и 12см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Самостоятельная работа №2

Вариант №1 **1.** Треугольник, площадь которого равна $36см^2$, вращается вокруг одной из сторон. Объём полученного тела вращения 192π $см^3$,а его поверхность 216π $см^2$. Определить стороны треугольника. **2.** Найти косинус угла, образованного плоскостью $4x-12y+6z-13=0$ с координатной плоскостью XOY. **3.** ABCD – тетраэдр. A(1;-4;-1), B(0;-2;1), C(2;0;0), D(5;2;4). Найти длину проекции ребра CD на плоскость ABC.	**Вариант №2** **1.** Треугольник, площадь которого равна $84см^2$, вращается вокруг одной из сторон. Объём полученного тела вращения 672π $см^3$,а его поверхность 336π $см^2$. Определить стороны треугольника. **2.** Найти угол между плоскостями $2x+5y+4z+15=0$ и $6x-3z+2=0$ **3.** ABCD – тетраэдр. A(-2;0;0), B(1;2;2), C(-2;4;2), D(2;2;4). Найти величину угла между ребром AD и высотой, опущенной из вершины D на плоскость ABC.

<u>Методическое обеспечение раздела 3</u>

Функции в задачах с параметрами

в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах

За основу раздела №3 принимается сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы [2]. Ниже приведены самостоятельные работы на параметры по всем разделам алгебры старшей школы. Выполнение этих работ является необходимой подготовкой к выполнению заданий С5 в ЕГЭ.

Самостоятельная работа №1

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения $(x-6a)^2+(x-2a)^2=128$ симметричны относительно точки $x=12$.	**1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$.
2. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $9(3x-1)a^2-(21x-19)a+2(x-1)=0$.	**2.** Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $2(4x-1)a^2-(14x-11)a+5(x-1)=0$.
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(20a-3)x+100a^2-30a=0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.	**3.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(8a-7)x+16a^2-28a=0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.
4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.	**4.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.
5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство	**5.** Определите, при каких значениях параметра a неравенство

$(x-a)(a-2x+1)\le 0$ верно для всех $x\in[-2;3]$.	$(a-x)(x-3a+6)\le 0$ верно для всех $x\in[1;4]$.

Самостоятельная работа №2

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2a,\\ \frac{5}{x}+\frac{12}{y}=1-3a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.	**1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4a,\\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=1-a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.
2. При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{3}{ax+a}>\frac{1}{5}$.	**2.** При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{1}{ax-a}>\frac{3}{4}$.
3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решением неравенства $\frac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.	**3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решением неравенства $\frac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Самостоятельная работа №3

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5ax+3a}=5x+3$ имеет ровно одно решение.	**1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет ровно одно решение.
2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство	**2.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство

$\sqrt{4a^2-x^2} \ge \lvert x-2a \rvert$ имеет единственное решение. **3.** Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2+ax} = x-2a$.	$\sqrt{3a^2-x^2} \ge \lvert x+a \rvert$ имеет единственное решение. **3.** Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2-ax} = x+2a$.

Самостоятельная работа №4

Вариант №1 **1.** При каких значениях параметра a уравнение $(15\sin x - a - 5)(15\sin x + 2a - 5) = 0$ имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$? **2.** Для всех значений параметра a решите уравнение: $\sin 3x = a\sin x$ **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17, \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59. \end{cases}$ **4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \dfrac{tg^2 x + 7}{3tgx + 1}$.	**Вариант №2** **1.** При каких значениях параметра a уравнение $(11\sin x - 3a - 5)(11\sin x + 4a + 3) = 0$ имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$? **2.** Для всех значений параметра a решите уравнение: $\cos 3x = a\cos x$ **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases} 21\cos^2 x + 11\cos^2 y = 9a - 8, \\ 33\cos^2 x + 7\cos^2 y = 45a - 64. \end{cases}$ **4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \dfrac{tg^2 x + 45}{7tgx + 2}$.

Самостоятельная работа №5

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x+(5\cdot a^2+a+4)\cdot 5^x-a-2=0$ имеет единственное решение.	**1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $81^x+(4\cdot a^2+3\cdot a+4)\cdot 9^x-2\cdot a+3=0$ имеет единственное решение.
2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $9^x-(7a-1)\cdot 3^x+12a^2-a-6\le 0$ имеет единственное решение.	**2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x-(5a-1)\cdot 2^x+6a^2-a-2\le 0$ имеет единственное решение.
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26}=\cos 14\pi x-81a^2-72a-13$ имеет решения. Найдите эти решения.	**3.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $14^{25x^2-10x+2}=\cos 10\pi x-36a^2-60a-12$ имеет решения. Найдите эти решения.
4. При каком значении a уравнение $\sqrt{2^{a+2+2x}}-2^{2x}=y^2-2y\sqrt{a}+11$ имеет единственное решение.	**4.** При каком значении a уравнение $2^{2a+3+x}-4^{x+1}=4y^2-8y\sqrt{a}+9$ имеет единственное решение.

Самостоятельная работа №6

Вариант №1	Вариант №2
1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $\ell og_3 \dfrac{3}{14x^2+3} = x^2 + (5b-1)^2$ имеет хотя бы одно решение.	**1.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $\ell og_9 \dfrac{9}{10x^2+9} = x^2 + (13b-12)^2$ имеет хотя бы одно решение.
2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ell og_{11}^2 x - (10a+23)\ell og_{11} x + 25a^2 + 115a + 132 = 0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 66$.	**2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ell og_4^2 x - (6a+23)\ell og_4 x + 9a^2 + 69a + 132 = 0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 40$.
3. Для всех значений параметра a решить неравенство: $x^{\ell og_a x} > a^3 x^2$	**3.** Для всех значений параметра a решить неравенство: $x^{\ell og_a x} < a^2 x$.

<u>Методическое обеспечение раздела 4</u>

Подготовка к единому государственному экзамену

В данном разделе в первую очередь рассмотрены задания B11 и B12 из первой части ЕГЭ, а также приведена подборка заданий С1-С4 из второй части ЕГЭ.

<u>B11 Исследование функций с помощью производной</u>

Можно выделить основные группы задач по этой теме:

- исследование функции на экстремумы,
- исследование функции на возрастание/убывание,
- исследование функции на наибольшее и наименьшее значения (в том числе на отрезке),
- исследование графика функции с помощью графика ее производной.

В первых трех типах задач функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. В последнем типе задач выводы о промежутках возрастания и убывания, экстремумах функции, ее наименьшеих и наибольших значениях нужно сделать, исследуя заданный график производной этой функции.

Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения.

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала, то функция $y=f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала, то функция $y=f(x)$ убывает на этом интервале.

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, $f'(x)>0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(x_0;b)$, то x_0 - точка максимума функции f

(упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума).

Признак минимума. Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, $f'(x) < 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;b)$, то x_0 - точка минимума функции f

(упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума).

Обратим внимание на то, что условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В самом деле, рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ -1, x = 0. \end{cases}$

Хотя эта функция определена в точке $x = 0$ и в этой точке производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Обратим внимание на следующий факт: точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, очень часто называют, например, точку минимума функции $y = x^2 + 3$, не «точка 0», а «точка $(0;3)$, подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется минимумом функции, а значение в точке максимума – максимумом функции.

Обратим внимание на то, что если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y = tgx$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y = tgx$ возрастает на всей области определения», «функция $y = tgx$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$». Если бы эти утверждения были верны, то из $2 > 1$следовало бы, что $tg2 > tg1$, а это не так.. Аналогично обстоит дело с функцией $y = \frac{1}{x}$; вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$является математической ошибкой. В самом деле из того, что $2>-3$, не следует, что $\frac{1}{2}\ <-\frac{1}{3}$, и, следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно – наименьшим) значением функции на отрезке.

Обратим внимание на то, что для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y=tgx$ на интервале $(0;1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0)=y_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1\in(x_0;1)$ значение функции окажется больше, чем y_0, поскольку функция $y=tgx$ является возрастающей.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\Re$ функции $y=3x^4-4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty;1]$, на котором функция убывает, и $[1;+\infty)$ - промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак.

Напротив, при исследовании функции $y=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty;0)$ и $[1;+\infty)$ - промежутки возрастания, $(0;1]$- промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y=x^3-3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5;2]$является вовсе не $y(-1)=2$(значение в точке минимума), а $y(-5)=-110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точке максимума.

Для решения такой задачи может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: «Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке». Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a;b]$, имеет на промежутке $(a;b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т.е. функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее – в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее – в правом.

Заметим еще следующее: алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке не является единственным способом предложенной задачи. Можно, например, исследовать функцию на монотонность на данном отрезке и, исходя из этого исследования, найти наибольшее и наименьшее значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения линейной или квадратичной функции на отрезке, вовсе не обязательно применять производную, а достаточно ограничиться известными свойствами этих функций.

Например, для функции $y = -7x + 3$ наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[-1;2]$ будут, соответственно, числа $y(-1) = 10$ и $y(2) = -11$, так как функция убывает на данном отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2\sin 3x + 1$ на отрезке $[1993;2010]$, достаточно заметить, что длина данного отрезка больше периода функции, и, следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны соответственно 3 и -1 – наибольшему и наименьшему значениям функции на всей области определения. Решение задачи с применением стандартного алгоритма в данном случае окажется существенно более долгим и длинным.

При вычислении наибольшего и наименьшего значений функции

$y = x^2 - 2x - 5$ на отрезке $[0;7]$ можно поступить следующим образом. Поскольку абсцисса $x_0 = 1$ вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 5$, принадлежит отрезку $[0;7]$, то наименьшего значения эта функция достигает в точке $x_0 = 1$ (это значение: $y(1) = -6$), а наибольшего – в том из концов отрезка $[0;7]$, который наиболее удален от x_0, то есть при $x = 7$ (это значение легко вычислить: $y(7) = 30$).

В некоторых более сложных случаях наибольшее и наименьшее значения функции также можно вычислять без использования производной. Например, найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos 2x + \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$. Воспользовавшись формулой двойного аргумента, получим, что $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$. Пусть $\sin x = t$. Поскольку по условию $x \in [0;\pi]$, то $t \in [0;1]$. Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y = -2t^2 + t + 1$ на отрезке $[0;1]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{4} \in [0;1]$. Поэтому наибольшее значение достигается в точке t_0 $y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$, а наименьшее – в том из концов отрезка $[0;1]$, который наиболее удален от точки t_0, то есть в точке $t = 1$ $y(1) = 0$.

Соответствующие значения x находятся из уравнений $\sin x = \frac{1}{4}$ и $\sin x = 1$ при условии $x \in [0;\pi]$.

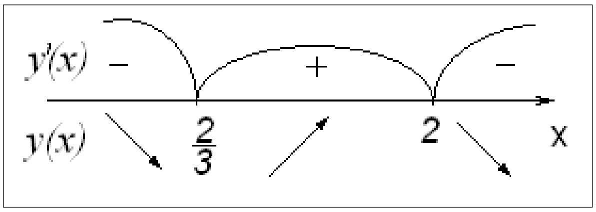
Практикум.

1. Найдите точку максимума функции $y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3$.

Решение.

$y' = -4 + 8x - 3x^2$. $y' = 0$, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{3}$, $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{3}$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители: $-3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-2)$



В точке $x=2$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 2

2. Найдите точку минимума функции $y=\frac{4}{x^2}+x+4$.

Решение.

$y'=-\frac{8}{x^3}+1$. $y'=0$ при $x=2$. В этой точке производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума.

Ответ: 2

3. Найдите точку максимума функции $y=(15-x)\sqrt{x}$

Решение.

$y'=-\sqrt{x}+(15-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$. $y'=0$, $-2x+15-x=0$, $x=5$.

В точке $x=5$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 5.

4. Найдите точку минимума функции $y=(x-1{,}5)\sin x+\cos x$, принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$y'=\sin x+(x-1{,}5)\cos x-\sin x=(x-1{,}5)\cos x$.

На промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль только при $x=1{,}5$, поскольку $\cos x>0$ при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. В точке $x=1{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном промежутке.

Ответ: 1,5.

5. Найти наибольшее значение функции $y = 3\ln(x+2) - 3x + 10$ на отрезке $[-1{,}5;0]$.

Решение.

$$y' = \frac{3}{x+2} - 3 = \frac{3 - 3x - 6}{x+2} = \frac{-3(x+1)}{x+2}$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = -1$, причем знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-1) = 3\ln 1 + 13 = 13$$

Ответ: 13

6. Найти наименьшее значение функции $y = 8 + (x-7)e^{x-6}$ на отрезке $[3;9]$.

Решение.

$$y' = e^{x-6} + (x-7)e^{x-6}, \qquad y' = e^{x-6}(x-6).$$

В точке $x = 6$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(6) = 8 - e^0 = 7$$

Ответ: 7

7. Найти наибольшее значение функции $y = 6\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};0\right]$.

$$y' = 6\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$y' < 0$, значит функция убывает на данном отрезке и наибольшее значение принимает на левом конце отрезка: $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -6\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 30 + 7 = -3 + 37 = 34$

Ответ: 34

В12 Текстовые задачи

Этот раздел предназначен для подготовки к решению задачи В12 Единого государственного экзамена по математике. Можно – при всей условности деления – выделить следующие три основные группы задач по этой теме:

- задачи на движение;
- задачи на работу;
- задачи на проценты, концентрацию, части, доли.

Умение решать текстовые задачи является базовым. Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь.

Пример В12 (2010)

Из п. А в п. В расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км/ч больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в п.В на 5 час позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

	Скорость (км/ч)	Расстояние (км)	Время (t)
велосипедист	x	60	$\frac{60}{x}$
мотоциклист	x+50	60	$\frac{60}{x+50}$

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+50}=5,\ x^2+50x-600=0,\ x_1=10, x_2=-60.$$

Ответ: 10.

Задачи на движение.

1. Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 60 км/ч и 80 км/ч?

Решение.

Пусть t ч – время, через которое автомобили встретятся.

$60t+80t=560, \quad t=4.$

Ответ: 4

2. Расстояние между городами A и B равно 380 км. Из города A в город B со скоростью 50 км/ч выехал автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть t ч – время, через которое после выезда второго автомобиля автомобили встретятся.

$50t+60t=380-50$; $t=3$. $50+3\cdot 50=200$ (км). Ответ: 200

3. Расстояние между городами A и B равно 436 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через 4 часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 56 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 324 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Второй автомобиль проехал до встречи $436-324=112$ (км).

Значит, второй автомобиль затратил на 112 км 2 часа, так как $112 \div 56 = 2$.

Пусть x км/ч – скорость первого автомобиля: $2x+112=436-4x$, $6x=324$, $x=54$.

Ответ: 54

4. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 6 км от места отправления. Первый идет со скоростью 4,5 км/ч, а второй – со скоростью 5,5 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. Сколько метров от опушки до места их встречи?

Решение.

Пусть x км – расстояние от опушки до места встречи.

$\frac{6}{5{,}5}+\frac{x}{5{,}5}=\frac{6-x}{4{,}5}$, $x=0{,}6$ км = 600 м. Ответ: 600

5. Из поселка A в поселок B, расстояние между которыми равно 20 км, выехал грузовик, а через 8 минут следом за ним выехал автобус, скорость которого на 5 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость автобуса, если в поселок В он прибыл одновременно с грузовиком. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть x км/ч скорость грузовика

$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+5}=\frac{8}{60}$, $x=25$. Ответ: 30

6. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 15 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 60 км/ч, скорость второго 80 км/ч. Сколько минут с момента старта пройдет, прежде чем первый автомобиль будет опережать второй ровно на 1 круг?

Решение.

$\frac{15}{80-60}=\frac{3}{4}$ ч = 45 мин. Ответ: 45

7. Расстояние между пристанями А и В равно 48 км. Отчалив от пристани А в 9:00 утра, теплоход проплыл с постоянной скоростью до пристани В. После двухчасовой стоянки у пристани В теплоход отправился в обратный рейс и прибыл в А в тот же день в 20:00. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть x км/ч – скорость теплохода в неподвижной воде.

$\frac{48}{x+4}+\frac{48}{x-4}+2=11$, $\frac{16}{x+4}+\frac{16}{x-4}=3$, $x=12$. Ответ: 12

Средняя скорость.

$$V_{ср.}=\frac{S_{общ.}}{t_{общ.}}$$

8. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 84 км/ч, а вторую половину времени- со скоростью 56 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

$$V_{ср.}=\frac{S_{общ.}}{t_{общ.}}=\frac{84t+56t}{2t}=\frac{140t}{2t}=70.$$ Ответ: 70

9. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 25 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 475 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$V_{ср.}=\frac{S_{общ.}}{t_{общ.}}=\frac{2S}{\frac{S}{25}+\frac{S}{475}}=\frac{2S}{\frac{20S}{475}}=47{,}5.$$ Ответ: 47,5.

10. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть – со скоростью 80 км/ч, а последнюю треть – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$V_{ср.}=\frac{S_{общ.}}{t_{общ.}}=\frac{S}{\frac{\frac{1}{3}S}{60}+\frac{\frac{1}{3}S}{80}+\frac{\frac{1}{3}S}{120}}=\frac{S}{\frac{S}{180}+\frac{S}{240}+\frac{S}{360}}=\frac{S}{\frac{9S}{720}}=80.$$ Ответ: 80

Движение протяженных тел.

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Решение.

$30c=\frac{1}{2}$ мин $=\frac{0{,}5}{60}=\frac{5}{600}=\frac{1}{120}$ ч. $S=60\cdot\frac{1}{120}=\frac{1}{2}$ км = 500 м. Ответ: 500

12. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой 800 м, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

Решение.

$90\cdot\frac{1}{60}=\frac{3}{2}$ км=1,5 км=1500 м; 1500-800=700 м. Ответ: 700

Задачи на производительность.

В определенном смысле задачи на работу схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния – объем работы. В тех случаях, когда объем работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице.

1. Гоша и Леша вскапывают грядку за 8 минут, а один Гоша – за 24 минуты. За сколько минут вскапывает грядку один Леша?

Решение.

$\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$. Ответ: 12

2. Карлсон съедает банку варенья за 8 минут, фрекен Бок – за 12 минут, а Малыш – за 24 минуты. За сколько минут они съедят банку варенья втроем?

Решение.

$\frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=4$. Ответ: 4

3. Первая труба пропускает на 12 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объемом 160 литров она заполняет на 12 минут позже, чем вторая труба?

$\frac{160}{x}-\frac{160}{x+12}=12$, $x=8$. Ответ: 8

4. В помощь садовому насосу, перекачивающему 7 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 5 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 63 литра?

Решение.

$\frac{63}{\frac{7}{4}+\frac{7}{5}}=\frac{9}{\frac{9}{20}}=20$. Ответ: 20

Задачи на проценты и доли

1. Цена на товар была повышена на 11% и составила 1443 рубля. Сколько рублей стоил товар до повышения цены?

Решение.

$1443:1{,}11=1300$ (р.)

Ответ: 1300

2. До снижения цен товар стоил 2700 рублей, а после снижения цен стал стоить 2322 рубля. На сколько процентов была снижена цена товара?

Решение.

2700-2322=378

378:2700=0,14

Ответ: 14

3. В 2000 году завод выпустил 12500 автомобилей. Каждый год в течение последующих 5 лет выпуск автомобилей увеличивался на 6 % от этого количества. Найдите, сколько автомобилей было выпущено заводом в 2005 году.

Решение.

$12500\cdot 0{,}06=750$ автомобилей – на столько увеличивался выпуск автомобилей ежегодно.

$5\cdot 750=3750$ автомобилей – прирост за 5 лет

12500+3750 =16250. Ответ: 16250

4. В банк положена сумма под 10% годовых. За какое минимальное число лет положенная на счет сумма увеличится в 1,5 раза?

Решение.

a - первоначальная сумма, положенная на счет

x% -годовая процентная ставка

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)^t\geq 1{,}5a;\qquad \left(1+\frac{x}{100}\right)^t\geq 1{,}5$$

Подставив $x=10$, получим: $1{,}1^t\geq 1{,}5$.

Вычислим несколько степеней числа 1,1: $1{,}1^2=1{,}21;\quad 1{,}1^3=1{,}331;\quad 1{,}1^4=1{,}4641;\quad 1{,}1^5=1{,}61051$.

Видим, что минимальное t, при котором $1{,}1^t \geq 1{,}5$ равно 5. Ответ: 5

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы.

1. Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

$0{,}15 \cdot 4 = 0{,}6$ (л) – вещества в первом растворе

$0{,}25 \cdot 6 = 1{,}5$ (л) – вещества во втором растворе

2,1 л - x%,

10 л – 100%

$\frac{2{,}1}{10} = \frac{x}{100}, x = 21$. Ответ: 21

2. Виноград содержит 90% влаги, а изюм – 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

	масса, кг	вода	вещество
виноград	x	0,9	0,1
изюм	20	0,05	0,95

$0{,}95 \cdot 20 = 0{,}1x$,

$x = 190$ (кг). Ответ: 190

3. Первый сплав содержит 10% меди, второй – 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение.

	Масса (кг)	Медь (кг)
1 сплав	x	$0{,}1x$

2 сплав	$x+3$	$0{,}4(x+3)$
3 сплав	$2x+3$	$0{,}3(2x+3)$

3 сплав = 1 сплав + 2 сплав

$$0{,}1x+0{,}4(x+3)=0{,}3(2x+3),\ x=3$$

Тогда масса 3 сплава $2\cdot 3+3=9$ (кг). Ответ: 9

4. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй – 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение.

	Масса (кг)	Концентрация кислоты	Масса кислоты (кг)
1 сосуд	30	x	$30x$
2 сосуд	20	y	$20y$
1 раствор	50	$0{,}68$	$50\cdot 0{,}68=34$
2 раствор	$2m$	$0{,}7$	$2m\cdot 0{,}7$

$$\begin{cases} 30x+20y=34, \\ mx+my=2m\cdot 0{,}7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x+10y=17, \\ x+y=1{,}4 \end{cases} \qquad x=0{,}6 \qquad 30\cdot 0{,}6=18$$

Ответ: 18

Арифметическая прогрессия.

1. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраску на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

$a_1 + a_n = 60$. $\quad S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 30n$, $\quad n = 8$. Ответ: 8

2. Том Сойер и Гекльберри Финн красят забор длиной 270 метров. Каждый следующий день они красят больше, чем в предыдущий, на одно и то же число метров. Известно, что за первый день Том покрасил 4 метра забора. Определите, сколько метров забора покрасил Том в последний день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

Решение.

$270 = \dfrac{4 + a_{18}}{2} \cdot 18$, $a_{18} = 26$. Ответ: 26

Геометрическая прогрессия.

1. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

$b_1 = 5000$, $q = 4$, $b_4 - ?$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\quad b_4 = 5000 \cdot 4^3$, $\quad b_4 = 320000$. Ответ: 320000

2. Инженер Иванов после открытия своего дела получил в 2000 году прибыль в размере 7000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 400 % по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Иванов в период с 2000 по 2003 год?

Решение.

$b_1 = 7000, q = 5, S_4 - ?$

$S_n = \dfrac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}, q \neq 1$, $\quad S_4 = \dfrac{7000 \cdot \left(5^4 - 1\right)}{4} = 1092000$. Ответ: 1092000

В таблице приведены задания B12 для самостоятельной работы.

1. Слесарь и его ученик, работая вместе, могут выполнить полученную работу за 15 часов. Если сначала будет работать слесарь, а потом его сменит ученик, то работа будет выполнена за 30 часов, при этом ученик выполнил на 40% меньше работы, чем слесарь. За сколько часов ученик сможет выполнить всю работу? Ответ: 40	**2.** Два тракториста, работая поочередно с разной производительностью, вспахали поле за 6 дней, при этом один работал утром, а второй после обеда. Первый вспахал на 200 % площади больше второго. За сколько дней второй тракторист сможет в одиночку вспахать поле, если, работая вместе, ни вспашут это поле за 3 дня? Ответ: 12
3. Для перевозки груза было заказано две машины разной грузоподъемности, которые должны были сделать одинаковое число рейсов, при этом первая машина должна перевести на 60 т груза больше, чем вторая. В действительности оказалось, что грузоподъемность этих машин меньше, чем предполагалось: у первой машины – на 4 т, а у второй – на 3 т. В результате каждый водитель сделал по 10 лишних рейсов, чтобы перевести свою часть груза. Какова плановая грузоподъемность второй машины? Ответ: 9	**4.** Два велосипедиста стартовали друг за другом с интервалом в 9 минут. Второй велосипедист догнал первого в 9 км от старта. Доехав до отметки 27 км, второй велосипедист повернул обратно и встретил первого на расстоянии 2 км от точки поворота. Найдите скорость второго велосипедиста. (Скорости велосипедистов считать постоянными. Ответ дать в км/ч.) Ответ: 15

5. Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В. Встретившись на промежуточной станции, поезда продолжили движение и первый из них прибыл в пункт В через 2 часа, второй – в пункт А через 8 часов после встречи. За сколько часов первый поезд проходит расстояние от А до В? Ответ: 6	**6.** Из пункта А в пункт В выходит первый турист. Через час из пункта В навстречу ему выходит второй турист и они встречаются на середине пути. Если бы оба туриста вышли одновременно, то через 4 часа расстояние между ними составило бы 10% первоначального. За сколько часов первый турист пройдет весь путь? Ответ: 10
7. Рабочий и его ученик, работая вместе, могут закончить работу за 14 часов. Если сначала $7/9$ работы выполнит рабочий, а затем оставшуюся работу выполнит ученик, то вся работа буде выполнена за 28 часов. За сколько часов сможет выполнить всю работу один рабочий? Ответ: 18	**8.** После того, как из котлована выкачали $3/8$ находившейся в нем воды, насос заменили на более мощный, и вся работа двух насосов по осушению котлована заняла 15 часов. Если бы оба насоса работали одновременно, котлован осушили бы за 5 часов. За какое время можно выкачать воду из котлована одним более мощным насосом? Ответ: 6
9. Найдите двузначное число, которое в 3 раза больше произведения его цифр. Если переставить цифры этого числа в обратном порядке, то отношение полученного числа к данному будет равно 3,4. Ответ: 15	**10.** Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится число 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится 2,25. Найдите это число. Ответ: 18

11. За декабрь цена на яблоки повысилась на 20%, а в январе снизилась на 14 %. На сколько процентов повысилась цена на яблоки за два месяца? Ответ: 3,2	**12.** За 1 квартал цена на телевизор понизилась на 10 %, а за 2 квартал – еще на 15 %. На сколько процентов снизилась цена на телевизор за два квартала? Ответ: 23,5
13. Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней. Ответ: 22	**14.** Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго? Ответ: 100

В таблице приведены задания С1 для самостоятельной работы.

1. $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$ **Ответ: -4;2**	**2.** $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$ **Ответ: -2; 6;** $3\pm\sqrt{21}$
3. $4^{-\frac{-1}{x}}+6^{-\frac{-1}{x}}=9^{-\frac{-1}{x}}$ **Ответ:** $\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\frac{3}{2}$	**4.** $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot128^{\frac{x+17}{x-3}}$ **Ответ: 10**
5. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$ **Ответ:** ±1	**6.** $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}$ **Ответ: 2**
7. $3^{\log_3\left(\lg\sqrt{x}\right)}-\lg x+\lg x^2-3=0$ **Ответ: 100**	**8.** $\log_x\left(9x^2\right)\cdot\left(\log_3 x\right)^2=4$ **Ответ:** $\frac{1}{9}$,3

9. $2\log_2(\log_2 x)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(2\sqrt{2}x\right)\right)=1$ **Ответ: 8**	**10.** $\log_3((x+1)(x-3))=4\log_9(2x+1)-\log_{\sqrt{5}}5$ **Ответ:** $\frac{11\pm\sqrt{261}}{5}$
11. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+34}-\sqrt{x+7}$ **Ответ: 2**	**12.** $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$ **Ответ:** $-\frac{8}{3};1$
13. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$ **Ответ:** $3\frac{1}{63};3\frac{1}{728}$	**14.** $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0$ **Ответ:** $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{4}{5}$
15. $\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=\frac{1}{4}$ **Ответ:** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\pm\frac{\pi}{5}+2\pi k;\pm\frac{3\pi}{5}+2\pi m,$ $n,k,m\in Z$	**16.** $4\sin 2x\cos 2x-3\sin^2 2x=1$ **Ответ:** $\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2},n\in Z$
17. $\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)\sqrt{tgx}=0$ **Ответ:** $\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k,n,k\in Z$	**18.** $\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ **Ответ:** $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k,k\in Z$

В таблице приведены задания С3 для самостоятельной работы.

1. $\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x<6$ **Ответ:** $[1;2)$	**2.** $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\ge 0$ **Ответ:** $\{2\}\cup[6;+\infty)$.

3. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$ **Ответ:** $\{5\} \cup \left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$.	**4.** $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5 \dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leq 0$ **Ответ: 1**
5. $\log_{\lvert x+2\rvert}\left(4+7x-2x^2\right) \leq 2$ **Ответ:** $(-0{,}5;0] \cup [1;4)$	**6.** $\left(x-\dfrac{15}{x}\right)\cdot\left\lvert\log_{\frac{-4x-1}{4}}\left(x^2+2x+1\right)\right\rvert \leq 2\cdot\left\lvert\log_{\frac{-4x-1}{4}}\left(x^2+2x+1\right)\right\rvert$ **Ответ:** $(-\infty;-3] \cup \{-2\}$.
7. $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \leq 0$ **Ответ:** $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right]$.	**8.** $\log_{24x-4x^2-27}\left(11x-2x^2-9\right) \geq \log_{2x-3}(x-1)$ **Ответ:** $\left(3-\sqrt{2};2\right) \cup (2;4] \cup \left(3+\sqrt{2};\dfrac{9}{2}\right)$.
9. $2^{x^2}\cdot 3^x < 6$ **Ответ:** $\left(-\log_2 6;1\right)$	**10.** $\left(x+\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2 \geq 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2$ **Ответ:** $0<x\leq 1, x=2, 3<x<4, 4<x<5.$
11. $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\lg x-2} < 100$ **Ответ:** $(1;1000)$	**12.** $\sqrt{5-x} < \dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$ **Ответ:** $1<x<2, 4<x\leq 5.$
13. $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x}+3$ **Ответ:** $0<x<10^{-\sqrt{\lg 5}}$, $10^{\sqrt{\lg 5}} < x.$	**14.** $\log_x(5-x) < \log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)-\log_x(x-1)$ **Ответ:** $(1;2) \cup (4;5)$.
15. $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right) > 0$ **Ответ:** $(2;5)$.	**16.** $\dfrac{1}{6x^2-5x} \geq \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$ **Ответ:** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right)$.
17. $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)} < 0$ **Ответ:** $x<-2, -\sqrt{2}<x<-1,$ $1<x<\sqrt{2}, x>2.$	**18.** $\log_{84-2x-2x^2}\cos x \leq \log_{x+19}\cos x$ **Ответ:** $\left(-\dfrac{1+\sqrt{167}}{2};-\dfrac{13}{2}\right] \cup \left[5;\dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}\right) \cup \{-2\pi\} \cup \{0\}$

19. $\frac{\sqrt{2x+3}-\lvert x\rvert}{\sqrt{9x-11}-\lvert x+1\rvert}\le 0$ **Ответ:** $[11/9;3)\cup(3;4)$.	**20.** $\frac{(x-1)\sqrt{x-1}+1}{x-2}<\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}$ **Ответ:** $[1;2)\cup(10;+\infty)$.
21. $\frac{\sqrt{x-7}-\lvert x-3\rvert}{\sqrt{3-x}-\lvert x-3\rvert}\le 1$ **Ответ:** $\left[3;\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\cup[5;7]$	**22.** $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\le x\sqrt{x}+8$ **Ответ:** $[0;4)\cup(4;+\infty)$
23. $\frac{(x-3)-7\sqrt{x-3}+6}{\sqrt{x-3}-1}>x-9$ **Ответ:** $(3;4)$	**24.** $\frac{\left(4^{-\frac{1}{x}}-16\right)(x-2)}{\log_{4x}(2x-1)}\le 0$ **Ответ:** $\left(\frac{1}{4};1\right)\cup[2;+\infty)$.
25. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2\le 3x+7$ **Ответ:** $[-1;4]$	**26.** $\frac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0$ **Ответ:** $x<0, x\ge 1$
27. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$ **Ответ:** $1<x<4$	**28.** $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$ **Ответ:** $1<x<2, 2<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.
29. $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}}\le\frac{x^{\frac{(\log_3 x)}{3}}}{3}$ **Ответ:** $0<x\le 3^{-2\sqrt{3}}, x\ge 3^{2\sqrt{3}}$.	**30.** $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2$ **Ответ:** $\log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$
31. $\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\log_{(6-x)}(x^2-8x+16)\right)^2\ge$ $\ge 5\cdot\left(\log_{(6-x)}(x^2-8x+16)\right)^2$ **Ответ:** $0<x\le 1, x=3, 4<x<5, 5<x<6$	**32.** $\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\ge$ $\ge 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$ **Ответ:** $0<x\le 1, x=3, 4\le x<5, 5<x\le 6$

33. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0$ **Ответ:** $1<x<\frac{3}{2}, 2<x<\frac{5}{2}<x>3.$	**34.** $\frac{\log_{2x-3}{}^2\frac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1}\le 3$ **Ответ:** $\frac{7}{4}$.
35. $\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0$ **Ответ:** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right].$	**36.** $\frac{(\log_3(10x+3))\cdot(\log_3(3x+10))}{(\log_3 10x)\cdot\log_3 x}\ge 0$ **Ответ:** $(0;0{,}1)\cup(1;\infty).$
37. $\log_{2x+3}x^2<1$. **Ответ:** $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3).$	**38.** $\log_2\frac{3x-2}{x-1}+3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2}<1$ **Ответ:** $1-\sqrt{2}<x<\frac{2}{3}, 1<x<1+\sqrt{2}.$
39. $\log_2\left(x^2-4\right)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}>2$ **Ответ:** $x<-2$ **или** $x>6$.	**40.** $\log_3((x+2)(x+4))+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$ **Ответ: -2**$<x<3$.

Задания С4 для самостоятельной работы

1. Отрезок BN является биссектрисой треугольника ABC. Найдите NC и ВС, если $AB = 30$, $AN = 20$ и угол BNC равен углу BCA. Ответ: $NC=11\frac{1}{9}$, $BC=16\frac{2}{3}$.
2. В равнобедренном треугольнике АВС с основанием АС проведена окружность радиуса R, проходящая через середину стороны АВ и вершины В и С. Причём точка С является точкой касания. Найдите высоту, опущенную из вершины В. Ответ: $\frac{7}{4}R$.
3. В треугольнике ABC AD и BO – биссектрисы, точка $M\in AB$, точка K лежит на продолжении стороны AC, CH – биссектриса внешнего угла DCK. Отрезки $DM\perp BO$, $DK\perp CH$, $AM=a$, $AK=b$. Найдите AD. Ответ: $\sqrt{ab}$
4. Найдите площадь трапеции с основаниями a и b и острыми углами α и β. Ответ: $\frac{a^2-b^2}{2(ctg\beta\pm ctg\alpha)}$.

5. Окружности радиусов 17 и 10 пересекаются в точках A и B. К окружностям проведена общая касательная. Найдите расстояние между точками касания, если AB = 16. Ответ: $4\sqrt{2}$, $14\sqrt{2}$.

6. В прямоугольном треугольнике даны высота h и биссектриса ℓ, проведённые из вершины прямого угла. Найти медиану, проведённую из вершины прямого угла.

Ответ: $m = \dfrac{hl^2}{2h^2 - l^2}$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC CH – высота к гипотенузе треугольника, ρ – расстояние между центрами вписанных окружностей в треугольниках ACH и BCH. Найдите радиус вписанной окружности в треугольник ABC. Ответ: $r = \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}$.

8. В прямоугольной трапеции ABCD $\angle$ A = 90^0. Диагональ BD равна 11. Расстояние от точки C до BD равно 4. Диагональ BD делит угол D в отношении 1 : 2. Найдите площадь трапеции. Ответ: 46,2; 51,04.

9. В трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$, $\angle CAD = \alpha$ и $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите площадь $ABCD$. Ответ: $\dfrac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}\sin\alpha$.

10. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Найдите площадь трапеции. Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Рекомендуемая литература

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. *Задачи с параметрами*. Справ. пособие по математике. - Мн.: Асар, 1996.

2. *Алгебра и начала анализа. Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы.* Под редакцией Шестакова С.А. – М.: Внешсигма-М, 2004.

3. Апанасов П.Т., Апанасов Н.П. *Сборник математических задач с практическим содержанием.* - М.: Просвещение, 1987.

4. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.

5. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.

6. Башмаков М.И. *Математика. Практикум по решению задач*- М.: Просвещение, 2005.

7. Виленкин Н.Я. и др. *Алгебра и математический анализ для 10 класса.* - М.: Просвещение, 1997.

8. Виленкин Н.Я. и др. *Алгебра и математический анализ для 11 класса*. - М.: Просвещение, 1996.

9. Виленкин Н.Я. и др. *За страницами учебника математики: Арифметика, Алгебра, Геометрия*: кн. для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. учреждений.- М: Просвещение, 1996.

10. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. *Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Методические рекомендации и дидактические материалы.* – М.: Просвещение, 1997.

11. Гиндикин С.Г. *Рассказы о физиках и математиках.* - М.: Просвещение, 1981.

12. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. *Задачи с параметрами*. - М.: Илекса, Гимназия, 1998.

13. Дорофеев Г.В. и др. *Сборник заданий для подготовки и проведения письменного* *экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс*: Экспериментальное пособие. – М.: Дрофа, 2001.

14. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. *Как решают нестандартные задачи*. - М.: МЦМНО, 1997.

15. Малышев И.Г. и др. *Элементы физико-математического моделирования в естествознании. Элементы планиметрии в старшей школе.* // Н.Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2005 г.

16. Малышев И.Г. и др. *Многочлены в школьном курсе математики и на вступительных экзаменах* // Н.Новгород: издательство ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2006 г.

17. Никольский С.М.и др. *Алгебра и начала анализа для 11 класса.* - М.: Просвещение, 2003.

18. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы.* Под редакцией Шестакова С.А. – М.: АСТ; Астрель, 2004.

19. Терешин Н.А. *Прикладная направленность школьного курса математики.* - М.: Просвещение, 1990.

20. Тихов. М.С. *125 занятий с одаренными детьми*. - Н.Новгород: ННГУ, 1999.

21. Дорофеев Г.В. Математика для каждого – М., Аякс, 1999.

22. Моденов В.П. Математика для абитуриентов – М., ИКИ; Физматлит; 2002.

23. Сергеев И.Н., Панферов В.С. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3 / Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.

24. Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / авт.-сост. А.П.Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др. – М.: АСТ: Астрель, 2010.

25. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр,2010.

26. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панферов В.С., Семенов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО,2009.

27. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

28. Ященко И.В., Шестаков С.А. Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

29. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

31. Смирнов В.А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С2 / Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.

32. Гордин Р.К. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4 / Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.

Содержание

Календарно-тематическое планирование

элективного курса в 10б классе

35 часов (1 час в неделю)

№	**Наименование разделов и дисциплин**	**Всего часов**	**Лекции**	**Выполнение практических заданий**	**Дата план**	**Дата факт**
1	**Геометрия**	**13**	**8**	**5**		
	Планиметрия	**8**	**6**	**2**		
	Из истории геометрии. Занимательные задачи по геометрии.		1	-	02.09	
	Прямоугольный треугольник.		1	-	09.09	
	Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника.		1		16.09	
	Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника.			1	23.09	
	Свойства касательных, хорд, секущих.		1	-	30.09	
	Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники.		1	-	07.10	
	Различные формулы площади и их применение.		1		14.10	
	Различные формулы площади и их применение.			1	21.10	
	Стереометрия	**5**	**2**	**3**		
	Сечения многогранников.		1		28.10	
	Сечения многогранников.			1	11.11	

	Сечения многогранников.			1	18.11	
	Углы между прямыми, прямыми и плоскостями.		1		25.11	
	Углы между прямыми, прямыми и плоскостями.			1	02.12	
2	**Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах**	**22**	**6**	**16**		
	Многочлены		1		09.12	
	Многочлены			1	16.12	
	Рациональные функции		1		23.12	
	Рациональные функции			1	30.12	
	Рациональные функции			1	20.01	
	Иррациональные функции		1		27.01	
	Иррациональные функции			1	03.02	
	Иррациональные функции			1	10.02	
	Показательные функции		1		17.02	
	Показательные функции			1	24.02	
	Показательные функции			1	02.03	
	Логарифмические функции		1		09.03	
	Логарифмические функции			1	16.03	
	Логарифмические функции			1	30.03	
	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.			1	06.04	
	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.			1	13.04	
	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.			1	20.04	

	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.			1	27.04	
	Тригонометрические функции		1		04.05.	
	Тригонометрические функции			1	11.05	
	Тригонометрические функции			1	18.05	
	Итоговый тест в формате ЕГЭ			1	25.05	

Календарно-тематическое планирование

элективного курса в 11б классе

35 часов (1 час в неделю)

Корректировка: 3 часа занятий электива выпали на 01.09, 23.02,08.03, поэтому укрупняем дидактические единицы, всего занятий будет проведено 32 часа

№	Наименование разделов и дисциплин	Всего часов	Лекции	Выполнение практических заданий	Дата план	Дата факт
1	**Геометрия**	**6**	**2**	**4**		
	Планиметрия	**4**	**1**	**3**		
	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.		1		01.09	
	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.			1	08.09	
	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.			1	15.09	
	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.			1	22.09	
	Стереометрия	**2**	**1**	**1**		
	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена		1		29.09	
	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена			1	06.10	
2	**Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции**	**20**	**6**	**14**		
	Использование области определения функций			1	13.10	
	Использование области определения функций			1	20.10	

	Использование ограниченности функций. Использование свойств синуса и косинуса		1		27.10	
	Использование ограниченности функций. Использование свойств синуса и косинуса			1	10.11	
	Использование ограниченности функций. Использование свойств синуса и косинуса			1	17.11	
	Замечательные неравенства		1		24.11	
	Замечательные неравенства			1	01.12	
	Применение производных. Задачи на исследование функций		1		08.12	
	Применение производных. Задачи на исследование функций		1		15.12	
	Применение производных. Задачи на исследование функций			1	22.12	
	Применение производных. Задачи на исследование функций			1	29.12	
	Применение производных. Задачи на исследование функций			1	19.01	
	Использование симметрии аналитических выражений. Использование чётности функции		1		26.01	
	Использование симметрии аналитических выражений. Использование чётности функции			1	02.02	
	Использование симметрии аналитических выражений. Использование чётности функции			1	09.02	
	Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах		1		16.02	

	Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах			1	01.03	
	Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах			1	15.03	
	Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах			1	05.04	
	Математика в решении прикладных задач. Наибольшие и наименьшие значения параметров в прикладных задачах			1	12.04	
3	**Подготовка к единому государственному экзамену**	**6**	**-**	**6**		
	Задания №13			1	19.04	
	Задания №14			1	26.04	
	Задания №15			1	03.05	
	Задания №16			1	10.05	
	Задания №17			1	17.05	
	Задания №18-19			1	24.05	
Итого		**32**	**8**	**24**		